

分类号_____

密级_____

UDC_____

编号 10486

武 汉 大 学
博 士 学 位 论 文

顾及频率依赖响应的三轴分层地球
自转理论

研 究 生 姓 名：陈 巍

指导教师姓名、职称：申文斌 教授

学 科 、 专 业 名 称：固体地球物理

研 究 方 向：天文地球动力学

二〇一一年十一月

**Dissertation for the Ph.D. degree
in
Solid Geophysics**

**Rotation of the Triaxially-stratified Earth with
Frequency-dependent Responses**

By
Wei Chen

Supervised by
Prof. WenBin Shen



**School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University
Wuhan 430079, China
November 2011**

郑重声明

本人的学位论文是在导师指导下独立撰写并完成的，学位论文没有剽窃、抄袭、造假等违反学术道德、学术规范和侵权行为，否则，本人愿意承担由此而产生的法律责任和法律后果，特此郑重声明。

学位论文作者 (签名):

2011年9月20日

论文创新点

1. 首次联合全球重力场模型和 MHB2000 地球模型确定了三轴分层地球模型。
2. 首次推导了顾及地球三轴性改正的章动转换函数，建立了三轴分层地球模型的章动序列。
3. 首次定量分析了三轴性对极移激发的影响，并导出了三轴地球 Chandler 晃动的频率—振幅调制机制。
4. 将海潮耗散性和地幔滞弹性引入极移理论，首次确定了频率依赖极移转换函数的显式表达式，并基于多种极移观测数据验证了本文频率依赖自转理论的可靠性。

摘要

地球自转主要研究地球本身绕参考轴自西向东的转动速率变化 (对应于日长变化), 以及参考轴相对于地球本体以及惯性空间的位置变化 (分别对应于极移以及进动和章动)。日长、极移以及章动通常称为地球自转参数 (ERP), 本文主要讨论自转参数中的章动和极移。章动规律性较强, 可较为精确地用模型预测; 极移则规律性较弱, 难以精确预测, 只能采用各种大地测量手段进行观测。

目前, 国际天文学会 IAU 推荐基于 Mathews et al. [2002] 章动理论的 IAU2000A_{R06} 岁差章动模型, 它考虑了地幔滞弹性、海洋潮汐、液体外核与地幔之间以及固体内核与液体外核之间的各种耦合作用等, 但没有考虑地球的三轴性。一方面, 大量理论研究指出三轴性的影响已超过目前观测精度, 不可忽略; 另一方面, IAU2000A_{R06} 岁差章动模型预测值与甚长基线干涉测量技术 (VLBI) 观测值之间仍存在着不可忽视的差异。这些都表明目前的章动理论有必要进一步改进。

本文扩展了 Mathews et al. [2002] 的章动理论, 使之可考虑三轴性和 Lambert & Mathews [2006] 导出的更多非线性项。特别地, 本文推导了三轴性导致的章动转换函数增量, 并给出了针对 IAU2000A_{R06} 模型的三轴性改正, 建立了三轴分层地球模型的章动序列。本文结果表明, 共有 13 项三轴性改正的量级超过 0.001 mas, 其中最大的 18.6 年项改正则可达 2 mas。本文暂只考虑了三轴性动力学形状对章动的影响, 后续研究将进一步考虑三轴性导致的核幔耦合影响。

极移研究一般采用线性化的 Liouville 方程, 它基于旋转对称地球模型, 同时只考虑了地球对长周期扰动的响应 (故极移转换函数为常数)。此传统自转理论已不能满足目前观测精度的需要, 因此有必要建立更为精确的自转理论。本文推导了三轴分层地球的自转动力学方程, 确定了相应的自转本征模, 检验了三轴性对极移的影响, 指出在极移激发研究中可忽略三轴性, 但研究 Chandler 晃动时应考虑三轴性: 三轴性会导致 Chandler 晃动的频率-振幅调制机制, 引起 Chandler 晃动轨迹的椭圆化 (这些特征已被大量观测证实)。此外, 为克服长期响应假设, 本文将地幔滞弹性和海潮耗散性引入极移理论, 并基于半理论半经验性的地幔滞弹性、周日与长期海潮模型, 建立了极移激发过程中的频率依赖响应模型, 确定了复数形式的、频率依赖的极移转换函数。复数形式的转换函数恰当地反映了地球体对外部周期性扰动的响应存在着衰减和相位延迟, 因此较传统理论地球物理意义更为明显。此外, 在数值计算结果方面, 本文理论在时域和频域也均优于传统理论。因此, 在极移激发研究中有必要考虑频率依赖响应的影响。

此外, 本文从极移激发的角度对比分析了多种全球大气、海洋和陆地水模型, 并综合这些模型的优点构建了一组联合模型 COMB。分析比较表明: 大气模型的可靠性最佳, 海洋模型次之, 陆地水模型的准确性最差, 且含有不同程度的长期 (周期约 2 年或更长) 系统偏差; 在大气、海洋激发的基础上加入陆地水激发一般会降低与观测激发在低频处的符合度, 不过, 考虑陆地水激发可更好地解释周年激发; 联合模型 COMB 在时域、频域以及在与观测激发的符合度方面均优于其它模型; 若对联合模型 COMB 应用本文的频率依赖转换函数, 则可更好地解释周年激发, 这进一步证实了频率依赖转换函数的可靠性。

最后, 本文利用多种极移观测数据探讨了高频观测激发的计算问题, 发现国际地球自转服务自转参数产品中心 (IERS EOP-PC) 的网页工具不能提供正确的高频观测激发, 因而给出了计算高频观测激发的正确方法。

关键词：地球自转理论；地球内部结构与动力学；地球三轴性；地幔滞弹性；海潮耗散性；大气、海洋和陆地水激发；高频观测激发

Abstract

Earth rotation variations refer to the rate changes in the west-to-east rotation around the reference axis (relevant with the length of day variation), and the motion of that reference axis relative to the solid Earth and the inertia space (evident as polar motion, precession and nutation, respectively). Length of day, polar motion and nutation are collectively termed as the Earth Rotation Parameters (ERP), and this study only discusses the changes in the orientation of the reference axis, namely nutation and polar motion. Nutation can be accurately modeled due to its regularity, while polar motion has to be measured by geodetic observations since it is irregular and thus hard to predict.

Currently, the International Astronomy Union (IAU) recommends the IAU2000A_{R06} nutation model [Mathews et al., 2002], which has taken into account the effects of the mantle anelasticity, the ocean tides, and the various core-mantle couplings among the mantle, the fluid outer core and the solid inner core, except for the impacts of the Earth's triaxiality. On one hand, theoretical studies demonstrate that the triaxiality impacts on nutation are larger than the measurement accuracy and thus should be considered. On the other hand, there are notable differences between the predictions of the IAU2000A_{R06} model and the VLBI (Very Long Baseline Interferometry) observations. Thus, it is quite necessary to refine the current nutation model IAU2000A_{R06}.

This study extends the nutation theory of Mathews et al. [2002] to include the effects of the Earth's triaxiality and more nonlinear terms derived by Lambert & Mathews [2006]. Especially, the increment to the nutational transfer function, due to the triaxiality effects, is deduced and the triaxiality corrections to the IAU2000A_{R06} are provided. For the triaxiality corrections, there are 13 terms larger than 0.001 mas, and the greatest one (the 18.6-year term) can reach as large as ~ 2 mas. For the time being, the triaxiality corrections considered here are totally due to the dynamic figure of the Earth, and the core-mantle coupling for a triaxial core-mantle boundary (CMB) will be included in future studies.

Conventionally, polar motion is studied based on the linearized Liouville equation, which adopts the rotationally-symmetry approximation and the long-period response assumption (thus the transfer functions for polar motion become constants). These approximations make the traditional theory not adequate for the current observation accuracy and thus a refined Earth rotation theory is needed. This study has deduced the dynamic equations and the rotational normal modes for the triaxially-stratified Earth, and verified the triaxiality effects on polar motion. In general, the triaxiality effects can be neglected in the excitations of polar motion, but should be considered in the Chandler wobble studies. In fact, Earth's triaxiality will lead to a frequency-amplitude modulation (FAM) mechanism for the Chandler wobble, and force its trace into an ellipse (these features have been demonstrated by observations). To overcome the long-period response assumption, the effects of mantle anelasticity and ocean tides have been introduced into the polar motion theory. Based on the semi-analytical models for mantle anelasticity and ocean tides, the frequency-dependent responses (FDR) in the polar motion are modeled. The new polar motion theory is characterized by the complex frequency-dependent transfer functions which

incorporate the effects of deformations of both the mantle and core, as well as the effects of the mantle anelasticity, the equilibrium and dissipative ocean tides. Complex transfer functions properly reflect the fact that decays and phase lags exist in the Earth's response to the periodic forcing. The new theory agrees better with the observation in both the time and frequency domains, and is more reasonable than the traditional theory in geophysical meanings. Thus, it is necessary to include the effects of FDR into the studies of polar motion excitations.

Then, rotational evaluations of various global atmospheric, oceanic and hydrological models are carried out, and a combined model set COMB, inheriting the merits of all the geophysical fluid models, is also established. Comparisons and Analyses indicate that the atmospheric models are the most reliable, oceanic ones take the second place and the hydrological ones, containing long-period biases (with ~2 year period or longer), are quite inaccurate; in general, adding hydrological excitation (HE) to the atmospheric and oceanic excitations (AE and OE, respectively) will bring down the low-frequency coherence between the geodetic and the geophysical excitations, but the annual excitation will be explained better by including HE; the COMB model set is superior to other geophysical model sets in both the time, frequency domains, and in the coherence with the observations; If the FDR is considered, the annual wobble can be explained even better with the COMB model set, which further confirms the reliability of the FDR model developed here.

Finally, the calculation of the high-frequency geodetic excitation is discussed. Due to the fact that the webpage tool of the IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) EOP-PC (Earth Orientation Parameter-Product Center) can not provide correct high-frequency geodetic excitation, this study provides two correct and simple methods to obtain the high-frequency signals in the geodetic excitation.

Key Words: Earth rotation theory; internal structure and dynamics of the Earth; Earth's triaxiality; mantle anelasticity; ocean-tide dissipation; atmospheric, oceanic and hydrological excitations; high-frequency geodetic excitation

目录

摘要.....	i
Abstract.....	iii
第一章 绪论.....	1
1.1 地球自转的基本概念.....	1
1.2 章动研究的进展、现状和存在的问题.....	2
1.3 极移研究的进展、现状和存在的问题.....	3
1.4 本文研究目标及论文总体安排.....	5
第二章 地球的动力学形状.....	7
2.1 地球的惯性张量的求解理论.....	7
2.2 利用最新的高精度重力场确定地球的惯性张量.....	11
2.3 地核主惯性矩.....	13
2.4 地球整体及内部圈层的动力学形状参数.....	14
2.5 本章小结与讨论.....	15
第三章 三轴性对章动的影响.....	17
3.1 Mathews 章动理论简介.....	17
3.2 Mathews 章动理论的推广.....	21
3.3 顾及地球三轴性的章动修正模型.....	24
3.4 本章小结与讨论.....	27
第四章 三轴分层地球的极移.....	29
4.1 地球自转动力学方程.....	29
4.2 形变及自转本征模.....	30
4.3 三轴分层地球的 Liouville 方程 — 变量代换法.....	32
4.4 三轴性对极移激发的贡献：以大气、海洋激发为例.....	35
4.5 三轴分层地球的 Liouville 方程 — 求导消元法.....	38
4.5.1 二阶微分动力学方程及其解.....	38
4.5.2 在长周期情况下的简化及在周年激发中的应用.....	40
4.6 三轴地球 Chandler 晃动的频率振幅调制理论 — 椭圆函数求解法.....	42
4.6.1 三轴刚体地球情形下 Euler 动力学方程的解.....	42
4.6.2 新解的意义及与其它理论比较.....	44
4.6.3 三轴地球的 Chandler 晃动.....	46
4.7 本章小结与讨论.....	49
第五章 极移激发中的频率依赖响应.....	51
5.1 地球的频率依赖响应.....	51
5.1.1 海潮的影响.....	51
5.1.2 地幔滞弹性的影响.....	55
5.1.3 负荷 Love 数频率依赖性的经验模型.....	56
5.2 确定频率依赖的转换函数.....	56
5.3 与传统理论的数值比较：应用于大气、海洋联合激发.....	59
5.4 与传统理论的物理意义比较：相关模型的一致性与合理性.....	62
5.5 本章小结与讨论.....	64
第六章 大气、海洋和陆地水对极移的激发作用.....	65
6.1 大气、海洋和陆地水数据的选取.....	65

6.2 大气、海洋和陆地水模型的初步检验	65
6.3 大气、海洋模型的改进及其检验	74
6.4 高频观测激发的计算与检验	81
6.5 本章小结与讨论	84
第七章 总结与展望	87
7.1 本文主要工作及贡献	87
7.2 本文主要创新点	87
7.3 研究展望	88
附录 A 液态外核角动量方程的推导	89
A.1 液态外核的动力学方程	89
A.2 液态外核的角动量方程	89
附录 B 无量纲引潮力位表达式的推导	91
B.1 引潮力位的一般形式	91
B.2 采用 HW95 引潮位模型格式的无量纲引潮力位	92
参考文献	95
攻读博士学位期间主持或参加的科研项目	103
攻读博士学位期间发表的学术论文	105
致谢	107

第一章 绪论

1.1 地球自转的基本概念

地球自转研究就是确定地球本身绕参考轴自西向东的转动速率变化 (对应于日长变化), 以及参考轴相对于地球本体和惯性空间的位置变化 (分别对应于极移、进动和章动), 并探究其产生机制。日长、极移以及章动通常称为地球自转参数 (Earth Rotation Parameter, ERP), 它们是联系国际天文参考系 ICRS (International Celestial Reference System, 准惯性参考系) 与国际地球参考系 ITRF (International Terrestrial Reference System, 地固参考系、非惯性系) 的关键参数 [McCarthy & Petit, 2003; Petit & Luzum, 2010]。地球系统的物质迁移、相对运动, 内部圈层之间的相互耦合以及外部天体的引力作用均可导致自转参数变化。因此, 自转参数同时也是研究全球地球动力学 [叶叔华等, 2000; Dehant & de Viron, 2002; Dehant et al., 2005]、地球内部结构与动力学状态的重要数据之一 [Gwinn et al., 1986; 高布锡, 1997; Mathews et al., 2002; Koot et al., 2008,2010; Koot & de Viron, 2011; 许厚泽等, 2010; Huang et al., 2011]。章动主要表现了外部天体引力的作用 (规律性较强), 可较为精确地用模型预测; 极移则主要由物质迁移、相对运动以及内部圈层之间的相互耦合 (规律性较弱) 引起, 难以用模型精确预报, 但可采用大地测量手段精确观测 [叶叔华等, 2000; Petit & Luzum, 2010]。

地球的自转轴曾在历史上长期被选作参考轴, 而当时的自转理论也均针对自转轴。但在上世纪七八十年代 (此时各种现代的空间大地测量手段兴起) 的争论中, 人们逐渐认识到各种天文、大地测量手段的观测值并不是相对于自转轴的 [Seidelmann, 1982; 叶叔华等, 2000]。为与观测相匹配, 国际天文协会 1984 年决定采用一种协议参考极 — 天球历书极 (Celestial Ephemeris Pole, CEP), 随后在 2000 年又将其定义得更准确而易于实现, 并改称“天球中间极 (Celestial Intermediate Pole, CIP)” [McCarthy & Petit, 2003; Hilton et al., 2006]。其间, Gross [1992] 和 Brzeziński [1992] 等建立了地球自转轴与协议参考轴之间的转换关系, 并进而导出了针对协议参考轴的自转动力学方程, 这使得极移观测和各种激发源作用可在一个统一的参考框架下进行比较。

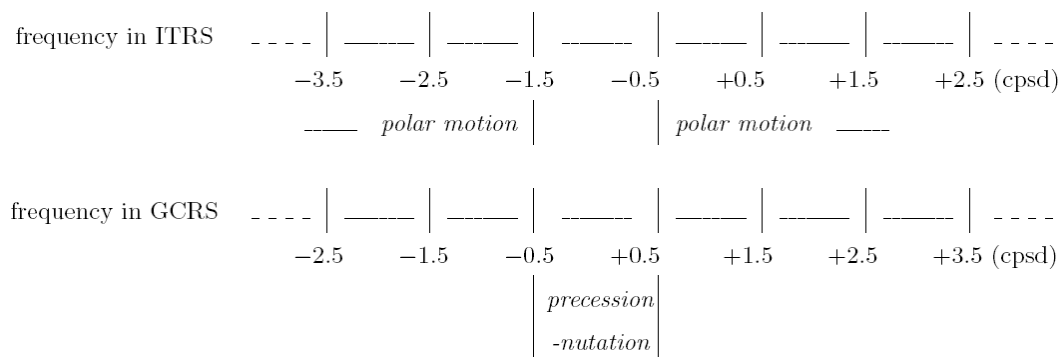


图 1.1 章动和极移的定义 (引自 IERS Conventions 2010)

Fig.1.1 Definitions of nutation and polar motion (from IERS Conventions 2010)

根据 IAU2000 决议, 极移和章动均为天球中间极 CIP 的运动状态, 二者之间以频率划分 (参

见图 1.1): 在准惯性系国际天球参考系 ICRS 中, CIP 在频段 $[-0.5, 0.5]$ cpd (周每天) 的运动称为章动, 在其余频段的运动则定义为极移; 在国际地球参考系 ITRS 中, CIP 在频段 $[-1.5, -0.5]$ cpd 的运动称为章动, 在其余频段的运动定义为极移 [McCarthy & Petit, 2003; Petit & Luzum, 2010]。这两种表述是等价的, 因为 ITRS 相对于 ICRS 存在着角速率为 1 cpd 的自转。

鉴于本文的主要研究内容是三轴分层地球的章动和极移, 以下将主要讨论这两个方面的发展现状及待解决问题。需要指出, 任意实体, 不论其几何形状和质量分布如何, 均存在着三个主惯性轴及相应的主惯性矩 A 、 B 、 C , 只要 A 、 B 、 C 互不相等, 其动力学形状就是三轴的 [申文斌和梁毅强, 2006]。

1.2 章动研究的进展、现状和存在的问题

最早被国际天文学会采纳为标准的是 Woolard [1953] 的刚体章动模型。由于当时构建该模型的各种天文参数精度十分有限, 且没有考虑地球的形变效应, 因此该模型精度较低。1984 年后, 国际上采用 IAU1980 岁差章动理论 [Seidelmann, 1982]: 其章动部分基于刚体章动序列 K77 [Kinoshita, 1977] 和 Wahr [1981] 给出的转换函数, 所选用的参考极是天球历书极 (Celestial Ephemeris Pole, CEP); 其进动部分则采用 Lieske et al. [1977] 的岁差模型。随着观测精度的提高和观测方法的改善, VLBI (甚长基线干涉) 和 LLR (激光测月) 观测发现 IAU1980 章动序列存在误差, 对于一些主要章动项的系数, 其误差可达到毫角秒量级 [Dehant et al., 1999]。2003 年 1 月 1 日起, IAU2000A/B 岁差章动模型开始取代 IAU1980 岁差章动模型, 并采用天球中间极 (Celestial Intermediate Pole, CIP) 作为参考极 [McCarthy & Petit, 2003; Petit & Luzum, 2010]。IAU2000A/B 岁差章动模型是以 REN-2000 刚体地球章动序列 [Souchay et al., 1999] 以及 MHB2000 非刚体地球章动转换函数 [Mathews et al., 2002] 为基础得到的, 其中, IAU2000B (精度为 1 mas) 是 IAU2000A (精度为 0.2 mas) 的简化版, 适合于精度要求不太高的情况。REN-2000 对 K77 作了一系列重要改进 [Souchay et al., 1999]: 考虑了地球的三轴性、行星的直接和间接影响以及相对论效应等, 其精度可达 $0.1 \mu\text{as}$ (K77 为 0.2 mas)。MHB2000 模型在以下方面改进了 IAU1980 章动理论 [Mathews et al., 2002; Hilton et al., 2006; Petit & Luzum, 2010]: 考虑了地幔滞弹性、海洋潮汐、液体外核与地幔之间以及固体内核与液体外核之间的电磁耦合, 并考虑了在这一类型的公式中被忽略的非线性项。

由于 IAU2000A 模型中的岁差部分仅对旧岁差模型作了拟合改正, 它与章动部分的动力学理论并不匹配 [McCarthy & Petit, 2003; Petit & Luzum, 2010]。因此, IAU2006 决议建议采用 Capitaine et al. [2003] 的 P03 进动模型 (与 IAU2000A 章动模型的动力学理论相容) 取代 IAU2000A 模型中的岁差部分, 同时章动模型的一些项也作了相应的微小改动, 新的岁差章动模型称为 IAU2000A_{R06} [Petit & Luzum, 2010]。

虽然 IAU2000A_{R06} 岁差章动模型与 IAU1980 相比有了许多重大改进, 但 MHB2000 转换函数仍建立在地球主惯性矩 $A = B$ 假设基础上, 该假设与顾及了地球三轴性的 REN-2000 不能很好地相容 (Souchay et al. [1999]、Escapa et al. [2002] 指出三轴性对章动振幅的影响已不可忽略), 故 IAU2000A_{R06} 并不能算作一个真正的三轴地球的章动序列, 这是其理论缺陷。从实用上考虑, IAU2000A_{R06} 岁差章动模型预测值与 VLBI 观测值之间仍存在着不可忽视的差异, 不能满足目前观测精度下的各种科技需求 [Vondrák et al., 2003; Capitaine et al., 2009; Petit & Luzum, 2010]。这主要是由于 MHB2000 精度的限制, 导致 IAU2000A_{R06} 的精度不足 (比 REN-2000 低 3 个数量级)。

如前所述, 采用类似于 Mathews et al. [2002]的方法结合国内外最新研究成果并考虑地球各圈层的三轴性, 建立与实际情况相符的三轴分层地球章动序列将是非常必要的。地球各圈层三轴性的影响将可能 (部分地) 解释 IAU2000A_{R06} 岁差章动模型预测值与实际观测值之间的差异。根据三轴分层地球模型将给出更接近实际情况的高精度的转换函数, 建立更高精度的岁差章动模型, 从而实现高精度的参考系转换, 满足各种科技应用需求。

1.3 极移研究的进展、现状和存在的问题

现代章动理论通常是先建立刚体章动模型, 再确定某一接近真实地球的模型与刚体地球模型之间的外力响应之比 (即章动转换函数), 最后将刚体章动模型乘上该响应比得到最终的章动模型。极移理论与之不同, 它基于的广义 Euler 动力学方程 (一般称为 Liouville 方程) 直接考虑了地球弹性、滞弹性、液核等影响 (章动理论通过转换函数间接考虑这些效应)。在 Euler-Liouville 理论框架下, 所有导致自转状态变化的因素可归为三大类: 质量迁移、相对运动和力矩。在动力学方程的推导过程中, 一般假定赤道主惯性矩 A 和 B 相等以简化 Liouville 方程, 从而可得含有激发函数的一般解, 而所有影响自转变化的因素均可由激发函数描述 [e.g., Munk & MacDonald, 1960; Lambeck, 1980; Moritz & Mueller, 1987; Gross, 2007; Jochmann, 2009]。上述即为传统的地球自转理论, 形式简洁, 易于应用。

毋庸置疑, 在极移研究方面, 传统自转理论在过去几十年里取得了显著成就, 例如:

1. Chandler 周期由 Euler 预测的约 305 天延长到实测的约 433 天, 它可由液核影响、海洋影响、地幔弹性及滞弹性定量解释 [e.g., Dahlen, 1974, 1976; Smith, 1977; Dickman, 1981; Vicente & Wilson, 1997; Mathews et al., 2002; Gross, 2007; Jochmann, 2009];
2. 若考虑地球非流体静力结构和核幔边界电磁耦合, 自由核章动 (Free Core Nutation, FCN) 周期理论值可由约 460 天缩短到接近实测的约 430 天 [Gwinn et al., 1986; Herring et al., 1986; de Vries & Wahr, 1991; Mathews et al., 2002; Herring et al., 2002; Ducarme et al., 2007; Rosat & Lambert, 2009];
3. 从理论上导出了新的自转本征模: 自由内核章动 (free inner core nutation, FICN) 和内核晃动 (inner core wobble, ICW) [e.g., Mathews et al., 1991a,b; de Vries & Wahr, 1991; Dehant et al., 1993];
4. 维持耗散性 Chandler 晃动 (Chandler Wobble, CW) 的主要激发源很可能是大气和海洋的不规则变化 [e.g., Gross, 2000; Gross et al., 2003; Seitz & Schmidt, 2005];
5. 大气和海洋的激发作用被证明是导致季节内、季节性及季节间 (intra-seasonal, seasonal and inter-seasonal) 极移的主要因素 [e.g., Barnes et al., 1983; Eubanks, 1993; Chao et al., 1996; Ponte & Stammer, 1999; Brzeziński et al., 2003; Gross et al., 2003; Nastula et al., 2003; Zhong et al., 2003; Zhou et al., 2006; Bizouard & Seoane, 2010], 陆地水则主要对季节性及季节间极移的激发有贡献 [e.g., Chen & Wilson, 2005];
6. 曾长期争论的地震激发最终被证实只对极移的长期趋势有贡献, 但不能维持 Chandler 晃动 [e.g., Chao & Gross, 1987; Gross & Chao, 2005]。
7. 十年尺度的极移被认为与液核相关, 但具体机制仍不清楚, 不过核幔地形耦合 (topographic core-mantle coupling) 对十年尺度变化的激发作用可能远大于电磁耦合 (electro-magnetic

coupling) [e.g., Hide et al., 1996; Greff-Lefftz & Legros, 1995; Mound, 2005]

当然，此处讨论不可能涵盖该领域方方面面的进展，更详尽的讨论可参阅 Munk & MacDonald [1960]、Lambeck [1980] 和 Moritz & Mueller [1987] 这三部巨著以及大量的相关期刊。

尽管进展显著，传统地球自转理论仍是有缺陷的：首先它假定地球旋转对称，其次采用了长期响应假设（即外部扰动的周期足够长，地球体处于平衡响应状态），这使得传统理论不适用于现今的观测精度。在国际天文协会 2009 年大会 (IAU General Assembly 2009) 上，地球自转小组 (IAU Commission 19 “Rotation of the Earth”) 对此问题作了公开讨论。专家们一致认为改进地球自转理论应该作为今后的重要任务。一方面，现代大地测量观测证实地球具有三轴性，即主惯性矩 A 、 B 、 C 互不相等 [e.g., Burša & Šima, 1984; Liu & Chao, 1991; Marchenko & Abrikosov, 2001; Marchenko & Schwintzer, 2003; Groten, 2004; Chen & Shen, 2010a]，这是对旋转对称假设 $A = B$ 的合理性的挑战。因此，与主惯性矩密切相关的地球自转运动应当与传统理论预测值有所不同。另一方面，传统理论仅考虑了地球的长期响应（因此 Liouville 方程的转换函数为常数 [e.g., Barnes et al., 1983; Eubanks, 1993; Gross, 2007]），而实际上，由于地幔滞弹性和海洋动力学影响，地球对不同频率的响应是与频率相关的 [e.g., Sasao & Wahr, 1981; Wahr & Sasao, 1981; Wahr, 1985; Wahr & Bergen, 1986; Dickman, 1993; Mathews et al., 1995; Mathews et al., 2002]

近年来，三轴地球的自转问题逐渐得到重视。Van Hoolst & Dehant [2002] 指出三轴性会导致 Chandler 晃动 CW 和自由核章动 FCN 频率减小（即周期延长）。Wang [2004] 认为三轴性可导致十年尺度的极移。Folgueira & Souchay [2005] 采用 Hamilton 理论讨论了三轴弹性地球的自转运动，发现地极的经纬度均存在着半 Chandler 周期的变化。基于数值计算模型 Dynamic Model for Earth Rotation and Gravity (DyMEG), Seitz & Schmidt [2005] 研究了大气、海洋对三轴地球极移的激发作用，其数值结果与观测激发在周年及 Chandler 频段均十分符合。Gross [2007] 讨论了刚体地球的自转问题，并提出对 Liouville 方程的一些可能改进之处。不过，上述研究均采用了线性化处理，以至于掩盖了自由晃动的某些固有特征。在未作线性化处理的情况下，Shen et al. [2007] 研究了刚体地球自转，发现三轴性会导致日长 (length of day, LOD) 产生半 Euler 周期的波动。Chen et al. [2009, 2010] 进一步扩展了 Shen et al. [2007] 的理论，导出了 Euler-Liouville 方程的一组新的椭圆函数解，提出了 Chandler 晃动频率-振幅调制机制 (frequency-amplitude modulation, FAM) 的理论模型。该机制 FAM 可部分解释观测到的 Chandler 晃动振幅和频率的正相关性 [e.g., Chandler, 1891; Iijima, 1965; Carter, 1981; Carter, 1982; Höpfner, 2003]。此外，Chen et al. [2009]、Chen & Shen [2010a] 还指出三轴性将导致自由晃动轨迹椭圆化（传统理论认为是圆，而 Chandler 晃动的观测结果是椭圆轨迹）。

传统理论也涉及地幔滞弹性和海潮耗散性对地球自转的影响：精确的地幔滞弹性、海潮模型有助于准确描述外部扰动的激发作用，同时，地球自转观测又可为这些模型提供外部约束 [e.g., Wahr, 1981; Sasao & Wahr, 1981; Wahr & Sasao, 1981; Wahr, 1985; Wahr & Bergen, 1986; Dickman, 1993; Mathews et al., 1995; Mathews et al., 2002; Koot et al., 2008]。Wahr [1981]、Sasao & Wahr [1981] 和 Wahr & Sasao [1981] 的研究表明，自由核章动引起的海潮、固体潮的近周日共振将导致潮汐 Love 数及负荷 Love 数随频率变化。Wahr [1985]、Wahr & Bergen [1986] 和 Benjamin et al. [2006] 则研究了地幔滞弹性对 Love 数和自转变化的影响。基于 Mathews et al. [1991a] 的章动理论，Mathews et al. [1995] 根据观测拟合了一组地球参数，并进而给出了适用于周日频段的共振形式的 Love 数频率依赖表达式。另一方面，Dickman [1993] 导出了所谓的“宽频段 (broad-band)” Liouville 方程，它可

描述液核与地幔之间解耦作用的频率依赖性、海洋的动力学响应和长期地幔滞弹性的影响。不过, Dickman 仅给出了一般形式, 公式复杂而没有具体的数值或表达式 (分三个频段取常数的 Love 数表达式除外), 难以实际应用; 其次, Love 数分段取常数对于真实情况而言过于粗略, 理论精度必然有限。因此, 目前得到广泛应用的自转理论是形式简洁、易于应用的 Eubanks [1993] 理论, 而不是形式复杂且不能保证精度的 Dickman [1993] 理论。以后将以 Eubanks [1993] 理论作为传统理论的代表。

目前, 高精度重力场模型 (如 EGM2008 [Pavlis et al., 2008]、EIGEN-GL05C [Foerste et al., 2008]) 的发布可用于估算高精度的地球动力学形状参数 (如主惯性矩、动力学扁率等), 从而可更好地确定地球的三轴性; 一些高精度的经验性或半经验半理论的海潮、地幔滞弹性模型 [Gross, 2009; Dickman & Gross, 2010; Chen & Shen, 2010b; Chen & Shen, 2011] 可用于更准确地确定地球的频率依赖响应。因此, 有必要也有条件克服传统自转理论的缺陷, 研究三轴性对自转状态的影响, 确定频率依赖的转换函数以更准确地描述各种扰动对极移激发的影响。

1.4 本文研究目标及论文总体安排

本文的研究目标主要有: 克服传统章动和极移理论中的地球旋转对称假设, 以及极移激发中的长周期响应假设, 根据观测精度需要, 建立三轴地球的章动模型, 建立顾及地球频率依赖响应的地球自转理论。

本文分为七章, 各章节安排如下:

第一章: 绪论。讨论章动和自转理论的发展现状及存在问题, 阐述本文的研究内容和研究目标。

第二章: 地球的动力学形状。结合高精度重力场 EGM2008、EIGEN-GL05C 和 MHB2000 地球模型 [Mathews et al., 2002], 确定三轴分层地球的动力学形状参数;

第三章: 三轴性对章动的影响。研究三轴性对章动的影响, 推导与 IAU2000A_{R06} 动力学理论相容的三轴性改正公式, 确定三轴性导致的 IAU2000 章动模型改正;

第四章: 三轴性对极移激发的影响。确定三轴分层地球模型的自转本征模, 研究三轴性对极移激发的影响, 以及三轴性导致的 Chandler 晃动的频率-振幅调制机制;

第五章: 极移激发中的频率依赖响应。基于目前精度最高的海潮、地幔滞弹性模型研究极移激发中的频率依赖响应问题, 确定地幔滞弹性和海潮耗散性对极移转换函数的影响;

第六章: 大气、海洋和陆地水对极移的激发。基于多种地球物理流体模型和极移数据, 研究大气、海洋和陆地水对极移的激发作用, 验证本文提出的频率依赖响应模型, 并讨论高频观测激发的计算方法。

第七章: 总论与展望。总结本文成果, 展望将来研究方向。

第二章 地球的动力学形状

2.1 地球的惯性张量的求解理论

在地心地固坐标系中，地球引力位可表示为如下球谐展开式 [e.g., Heiskanen & Moritz, 1967]

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_E}{r} + \frac{GM_E}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right] \quad (2.1)$$

其中， r, θ, λ 分别表示场点到地心的距离、余纬和经度； M_E 和 a 分别表示地球质量和地球长半轴； G 为万有引力常量； $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ 为正规化缔合 Legendre 函数； $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ 为正规化球谐系数。

地球的动力学形状仅与式 (2.1) 的二阶项有关

$$V_2 = \frac{GM_E a^2}{r^3} \sum_{m=0}^2 (\bar{C}_{2m} \cos m\lambda + \bar{S}_{2m} \sin m\lambda) \bar{P}_{2m}(\cos \theta) \quad (2.2)$$

在直角坐标下，式 (2.2) 可表示为

$$V_2 = \frac{\sqrt{15} GM_E a^2}{2r^5} \mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{r} \quad (2.3)$$

其中

$$\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T \quad (2.4)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{2,2} - \frac{\bar{C}_{2,0}}{\sqrt{3}} & \bar{S}_{2,2} & \bar{C}_{2,1} \\ \bar{S}_{2,2} & -\bar{C}_{2,2} - \frac{\bar{C}_{2,0}}{\sqrt{3}} & \bar{S}_{2,1} \\ \bar{C}_{2,1} & \bar{S}_{2,1} & \frac{2\bar{C}_{2,0}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

考虑到二阶位系数可用直角坐标表示为 [e.g., Heiskanen & Moritz, 1967]

$$\begin{cases} \bar{C}_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{5}a^2 M_E V} \int (z'^2 - \frac{x'^2 + y'^2}{2}) dm \\ \bar{C}_{2,2} = \frac{1}{2\sqrt{15}a^2 M_E V} \int (x'^2 - y'^2) dm \\ (\bar{S}_{2,2}, \bar{S}_{2,1}, \bar{C}_{2,1}) = \frac{3}{\sqrt{15}a^2 M_E V} \int (x'y', y'z', z'x') dm \end{cases} \quad (2.6)$$

并注意到惯性矩和惯性积可表示为

$$\begin{cases} I_{11} = \int_V (y'^2 + z'^2) dm, & I_{23} = \int_V y'z' dm \\ I_{12} = \int_V (x'^2 + z'^2) dm, & I_{13} = \int_V z'x' dm \\ I_{13} = \int_V (x'^2 + y'^2) dm, & I_{12} = \int_V x'y' dm \end{cases} \quad (2.7)$$

则可得惯性矩、惯性积与二阶位系数之间存在如下关系

$$\begin{cases} \bar{C}_{2,0} = \frac{1}{2\sqrt{5}a^2M_E}(I_{11} + I_{22} - 2I_{33}) \\ \bar{C}_{2,2} = \frac{1}{2\sqrt{15}a^2M_E}(I_{22} - I_{11}) \\ (\bar{S}_{2,2}, \bar{S}_{2,1}, \bar{C}_{2,1}) = \frac{3}{\sqrt{15}a^2M_E}(I_{12}, I_{23}, I_{13}) \end{cases} \quad (2.8)$$

特别地, 若选取某一坐标系使其坐标轴与地球的主惯性轴重合 (这种坐标系称为主惯性轴坐标系), 则式 (2.7) 中 $I_{ij} (i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$ 项将全等于零; 此时的 $I_{ii} (i = 1, 2, 3)$ 即为主惯性矩。通常用符号 C 表示最大的极主惯性矩, 用 A 和 B 分别表示较小和较大的赤道主惯性矩。极主惯性矩 C 对应的主惯性轴又常称为地球的形状轴, 它与地球的自转轴非常接近, 两者夹角不超过 0.5 角秒 [e.g., Heiskanen & Moritz, 1967; Lambeck, 1980]。

在主惯性轴坐标系中, 二阶引力位可表示为 (加 \sim 表示该符号定义于主惯性轴坐标系中)

$$V_2 = \frac{GM_E a^2}{\tilde{r}^3} \sum_{m=0}^2 (\bar{A}_{2m} \cos m\tilde{\lambda} + \bar{B}_{2m} \sin m\tilde{\lambda}) \bar{P}_{2m}(\cos \tilde{\theta}) \quad (2.9)$$

或

$$V_2 = \frac{\sqrt{15}GM_E a^2}{2\tilde{r}^5} \tilde{\mathbf{r}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{r}} \quad (2.10)$$

根据式 (2.8), 主惯性矩 A, B, C 与位系数 $\bar{A}_{2,0}, \bar{A}_{2,2}$ 之间满足

$$\begin{cases} \bar{A}_{2,0} = \frac{A+B-2C}{2\sqrt{5}a^2M_E} \\ \bar{A}_{2,2} = \frac{\sqrt{3}(B-A)}{2\sqrt{5}a^2M_E} \end{cases} \quad (2.11)$$

另一方面, 天文和空间大地测量观测可独立地确定天文地球动力学扁率

$$H = \frac{C - (A+B)/2}{C} \quad (2.12)$$

联立式 (2.11) 和 (2.12) 即得 [Chen & Shen, 2010a]

$$\begin{cases} A = \sqrt{5}M_E a^2 \left[\left(1 - \frac{1}{H}\right) \bar{A}_{2,0} - \frac{\bar{A}_{2,2}}{\sqrt{3}} \right] \\ B = \sqrt{5}M_E a^2 \left[\left(1 - \frac{1}{H}\right) \bar{A}_{2,0} + \frac{\bar{A}_{2,2}}{\sqrt{3}} \right] \\ C = -\sqrt{5}M_E a^2 \frac{\bar{A}_{2,0}}{H} \end{cases} \quad (2.13)$$

根据式 (2.13), 由主惯性轴中的位系数 $\bar{A}_{2,0}, \bar{A}_{2,2}$ 和地球的动力学扁率 H 可确定主惯性矩 A, B, C 。值得指出, 国际上全球重力场模型 (如 EIGEN-GL05C 和 EGM2008) 给出的 \bar{C}_{2m} 和 $\bar{S}_{2m} (m = 0, 1, 2)$ 均是定义于国际地球参考系 (International Terrestrial Reference System, ITRS) 的, 而 ITRS 并非主惯性轴坐标系, 因此 $\bar{A}_{2,0}, \bar{A}_{2,2}$ 需要由如下方法确定。

考察式 (2.8), 惯性积 $I_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$ 意味着位系数 $\bar{B}_{2,2}, \bar{B}_{2,1}, \bar{A}_{2,1}$ 均为零, 于是在主惯性轴坐标系中式 (2.5) 可简化为如下形式

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{2,2} - \frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{A}_{2,2} - \frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

从数学的角度，这相当于将矩阵 \mathbf{Q} 相似对角化，亦即求解特征方程

$$|\varepsilon \mathbf{E} - \mathbf{Q}| = 0 \quad (2.15)$$

的特征值 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 。这些特征值为 [Marchenko & Abrikosov, 2001; Marchenko & Schwintzer, 2003; Chen & Shen, 2010a]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\varphi + \pi}{3}\right) \\ \varepsilon_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\frac{\varphi}{3} \\ \varepsilon_3 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\varphi - \pi}{3}\right) \end{cases} \quad (2.16)$$

其中

$$\begin{cases} p = \bar{C}_{2,0}^2 + \bar{C}_{2,1}^2 + \bar{S}_{2,1}^2 + \bar{C}_{2,2}^2 + \bar{S}_{2,2}^2 \\ q = \frac{2\bar{C}_{2,0}^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\bar{C}_{2,0}}{\sqrt{3}} (\bar{C}_{2,1}^2 + \bar{S}_{2,1}^2 - 2\bar{C}_{2,2}^2 - 2\bar{S}_{2,2}^2) + \bar{C}_{2,2} (\bar{C}_{2,1}^2 - \bar{S}_{2,1}^2) + 2\bar{C}_{2,1}\bar{S}_{2,1}\bar{C}_{2,2} \\ \varphi = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} p^{-3/2} q\right) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (2.17)$$

于是 \mathbf{Q} 的相似对角化矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}$ 又可用特征值 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 表示为

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

对比式 (2.14) 和 (2.18)，可得

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \bar{A}_{2,2} - \frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \\ \varepsilon_2 = -\bar{A}_{2,2} - \frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \\ \varepsilon_3 = 2\frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (2.19)$$

即有

$$\begin{cases} \bar{A}_{2,0} = \frac{\sqrt{3}\varepsilon_3}{2} \\ \bar{A}_{2,2} = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_3}{2} \end{cases} \quad (2.20)$$

由式 (2.20) 以及 (2.16)、(2.17) 可确定系数 $\bar{A}_{2,0}$, $\bar{A}_{2,2}$, 进而根据式 (2.13) 即可确定主惯性矩 A, B, C 。

要完全确定地球的惯性张量, 还需求解主惯性轴的指向。将特征值表达式 (2.16)、(2.17) 代入到方程

$$(\varepsilon_i \mathbf{E} - \mathbf{H})\mathbf{r} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.21)$$

可求出单位化的特征向量 \mathbf{r}_i^0 。又根据单位向量的定义, \mathbf{r}_i^0 可表示为 A, B, C 的方向余弦向量

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1^0 = [\cos(A, x) \quad \cos(A, y) \quad \cos(A, z)]^T \\ \mathbf{r}_2^0 = [\cos(B, x) \quad \cos(B, y) \quad \cos(B, z)]^T \\ \mathbf{r}_3^0 = [\cos(C, x) \quad \cos(C, y) \quad \cos(C, z)]^T \end{cases} \quad (2.22)$$

从而地球主惯性轴的方向得以确定。根据式 (2.21) 可求得单位化特征向量为

$$\mathbf{r}_i^0 = [l_i \quad m_i \quad n_i]^T \quad (2.23)$$

其中 [Marchenko & Abrikosov, 2001; Marchenko & Schwintzer, 2003; Chen & Shen, 2010a]

$$\begin{cases} u_i = \frac{\bar{C}_{2,1}\bar{S}_{2,1} + \bar{S}_{2,2}(\varepsilon_i - 2\bar{C}_{2,0}/\sqrt{3})}{\bar{S}_{2,1}\bar{S}_{2,2} + \bar{C}_{2,1}(\varepsilon_i + \bar{C}_{2,2} + \bar{C}_{2,0}/\sqrt{3})} \\ n_i = \left[1 + u_i + \left(\frac{\bar{S}_{2,1}u_i - \varepsilon_i + 2\bar{C}_{2,0}/\sqrt{3}}{\bar{C}_{2,1}} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ m_i = u_i n_i \\ l_i = \frac{n_i}{\bar{C}_{2,1}} \left(\varepsilon_i - \frac{2\bar{C}_{2,0}}{\sqrt{3}} - \bar{S}_{2,1}u_i \right) \end{cases} \quad (2.24)$$

故地球主惯性轴 (A, B, C) 与地固坐标系轴 (x, y, z) 的夹角分别为

$$\begin{cases} \alpha_i = (i, x) = \arccos l_i \\ \beta_i = (i, y) = \arccos m_i, \quad i = A, B, C \\ \gamma_i = (i, z) = \arccos n_i \end{cases} \quad (2.25)$$

从而地球主惯性轴的经度和余纬分别为 [Chen & Shen, 2010a]

$$\begin{cases} \lambda_i = \arctan \frac{m_i}{l_i} \\ \theta_i = \arctan \frac{n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \end{cases}, \quad i = A, B, C \quad (2.26)$$

根据式 (2.26) 和 (2.24), 主惯性轴的指向也得以确定。

2.2 利用最新的高精度重力场确定地球的惯性张量

直至目前，地球惯性张量的推荐值一直是基于重力场模型 JGM-3 [Groten, 2004]。虽然 IERS Conventions (2003) 推荐采用精度更高的 EGM96 模型 [McCauthy & Petit, 2003]，但它并没有提供基于 EGM96 的惯性张量值。2008 年，Pavlis et al. [2008] 和 Foerste et al. [2008] 分别发布了精度更高的全球重力场模型 EGM2008 和 EIGEN-GL05C。最近，IERS Conventions (2010) 推荐采用更为精确的 EGM2008 模型。相对于 JGM-3 约 1 m 精度的全球大地水准面，EIGEN-GL05C 和 EGM2008 确定的全球大地水准面精度分别约为 0.3 和 0.2 m (各种模型评估及比较的具体结果可参见 <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html>)。因此，我们有理由相信采用这些新的重力场模型将给出更为精确的惯性张量值。

表 2.1 确定惯性张量所需参数

Table 2.1 Relevant parameters used in the determination of the inertia tensor

Parameters	Values
G	$6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$
H	$0.0032737634 \pm 0.0000000032$
EIGEN-GL05C	
GM_E	$3.986004415 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
a	6378136.46 m
$\bar{C}_{2,0} (\times 10^{-11})$	-48416944.4098 ± 2.709 (零潮汐) -48416527.0522 ± 2.709 (无潮汐)
$\bar{C}_{2,1} (\times 10^{-11})$	$-27.3478115204 \pm 0.7852$
$\bar{S}_{2,1} (\times 10^{-11})$	144.340021207 ± 3.742
$\bar{C}_{2,2} (\times 10^{-11})$	243937.279232 ± 1.212
$\bar{S}_{2,2} (\times 10^{-11})$	-140026.609089 ± 1.185
EGM2008	
GM_E	$3.986004415 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
a	6378136.3 m
$\bar{C}_{2,0} (\times 10^{-11})$	$-48416931.7366974 \pm 0.7481239490$ (零潮汐) $-48416514.3790815 \pm 0.7481239490$ (无潮汐)
$\bar{C}_{2,1} (\times 10^{-11})$	$-20.6615509074176 \pm 0.7063781502$
$\bar{S}_{2,1} (\times 10^{-11})$	$138.441389137979 \pm 0.7348347201$
$\bar{C}_{2,2} (\times 10^{-11})$	$243938.357328313 \pm 0.7230231722$
$\bar{S}_{2,2} (\times 10^{-11})$	$-140027.370385934 \pm 0.7425816951$

根据 2.1 节的理论，确定地球惯性张量的参数主要有万有引力常数 G 、地球质量 M 、天文地球动力学扁率 H 以及重力场的二阶位系数，其数值均列于表 2.1。尽管第 18 届国际大地测量组织大会 (IAG General Assembly) 的第 16 号决议推荐采用零潮汐 (zero-tide) 系统，目前大部分重力场模型给出的却是无潮汐 (tide-free) 结果 [e.g., McCauthy & Petit, 2003; Petit & Luzum, 2010]。其中，“无

“潮汐”是指去除潮汐 (包括永久潮汐) 的所有影响 (包括间接影响, 即潮汐引起的形变效应), “零潮汐”则是在“无潮汐”的基础上加入永久潮汐引起的形变效应。EGM2008 同时提供了零潮汐和无潮汐值, 而 EIGEN-GL05C 仅提供了无潮汐值, 但根据上述第 16 号决议可计算出相应的零潮汐值 (见表 2.1)。

基于 2.1 节理论和表 2.1 所列参数, 地球的惯性张量或者说主惯性矩和主惯性轴得以确定, 其值和相应不确定度列于表 2.2a,b。显然, 相对于 Groten [2004] 的推荐值 (零潮汐值), 采用新模型 EIGEN-GL05C 或 EGM2008 可显著提高惯性张量的确定精度 (表 2.2a 同时给出了零潮汐和无潮汐值)。由表 2.2a 可知, 零潮汐和无潮汐系统下的 A, B, C 数值差异不大, 甚至小于 Groten (2004) 推荐值的不确定度, 但已大于 EIGEN-GL05C 或 EGM2008 确定值的中误差。因此, 区分 A, B, C 数值是零潮汐或是无潮汐仅对近几年发布的高精度重力场模型有意义。不过, 主惯性轴的指向对零潮汐或无潮汐系统的选择并不敏感, 两系统差异对主惯性轴指向的影响只占指向数值不确定度的 1%到 2%, 故表 2.2b 中并未指明选择何种系统。至此可得出如下结论: 对应目前观测精度而言, 主惯性矩 A, B, C 的数值应明确指明是零潮汐或是无潮汐的, 而主惯性轴指向 $(\lambda_i, \theta_i) (i = A, B, C)$ 则无需考虑这种差异 [Chen & Shen, 2010a]。

表 2.2a 地球主惯性矩数值 (单位: $\times 10^{37} \text{ kg m}^2$)

Table 2.2a Values of Earth's principal inertia moments (unit: $\times 10^{37} \text{ kg m}^2$)

	Groten (2004)	本文 (EIGEN-GL05C)	本文 (EGM2008)	
A	零潮汐	8.0101 ± 0.0002	8.010085 ± 0.000030	8.0100829 ± 0.0000084
	无潮汐	Not provided	8.010016 ± 0.000030	8.0100138 ± 0.0000084
B	零潮汐	8.0102 ± 0.0002	8.010262 ± 0.000030	8.0102594 ± 0.0000084
	无潮汐	Not provided	8.010193 ± 0.000030	8.0101903 ± 0.0000084
C	零潮汐	8.0365 ± 0.0002	8.036483 ± 0.000030	8.0364807 ± 0.0000084
	无潮汐	Not provided	8.036414 ± 0.000030	8.0364114 ± 0.0000084

表 2.2b 地球主惯性轴指向 (单位: 度)

Table 2.2b Orientations of Earth's principal axes (unit: degree)

	Groten (2004)	本文 (EIGEN-GL05C)	本文 (EGM2008)
λ_A	-14.9291 ± 0.0010	-14.92850 ± 0.00012	-14.928509 ± 0.000075
θ_A	Not provided	$0.00004331 \pm 0.00000084$	$0.00003788 \pm 0.00000048$
λ_B	Not provided	75.07150 ± 0.00012	75.071491 ± 0.000075
θ_B	Not provided	0.0000908 ± 0.0000028	$0.00008805 \pm 0.00000050$
λ_C	Not provided	-79.42 ± 0.40	-81.65 ± 0.29
θ_C	Not provided	89.9998994 ± 0.0000025	$89.99990414 \pm 0.00000050$

由于根据 EGM2008 确定的惯性张量精度最高, 同时 2010 年 10 月公布的 IERS Conventions (2010) 也推荐采用 EGM2008, 因此, 后继章节中将采用基于 EGM2008 的惯性张量值: 主惯性矩 A, B, C 的零潮汐值将用来描述地球的角动量, 主惯性轴指向 $(\lambda_i, \theta_i) (i = A, B, C)$ 则近似构成推导三轴地球 Liouville 方程的坐标系。

2.3 地核主惯性矩

相对于地球整体的惯性张量，地核惯性张量的确定相当棘手：地球的惯性张量与重力场二阶位系数（它们可由观测得出）直接相关，而地核惯性张量中仅有主惯性矩可由“流体静力平衡 (hydrostatic equilibrium) + 球形分层地球模型（如 Preliminary Reference Earth Model, PREM [Dziewonski & Anderson, 1981]）”或一些顾及非流体静力平衡的修正模型间接推算 [e.g., Wahr, 1981; Mathews et al., 1991b; de Vries & Wahr, 1991; Mathews et al., 2002]，而地核主惯性轴几乎无法确定。实际上，这种方法只能粗略估计地核的极主惯性矩 C_c 和赤道平均主惯性矩 $\bar{A}_c = (A_c + B_c)/2$ ，而不是 A_c 和 B_c ($c = f, s$ 分别对应液态外核及固态内核)。Mathews et al. [1991b] 给出了基于 PREM 的估值 $\bar{A}^M = 8.0115 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$ 、 $\bar{A}_f^M = 9.0583 \times 10^{36} \text{ kg m}^2$ 和 $\bar{A}_s^M = 5.8531 \times 10^{34} \text{ kg m}^2$ ；Mathews et al. [2002] 由最小二乘拟合 VLBI (甚长基线干涉) 观测数据给出了地球各圈层的动力学扁率：

$$\begin{cases} e^M = (C^M - \bar{A}^M)/\bar{A}^M = 3.2845479 \times 10^{-3} \\ e_f^M = (C_f^M - \bar{A}_f^M)/\bar{A}_f^M = 2.6456 \times 10^{-3} \\ e_s^M = (C_s^M - \bar{A}_s^M)/\bar{A}_s^M = 2.422 \times 10^{-3} \end{cases} \quad (2.27)$$

其中，上标 M 表示 Mathews et al. [1991a] 或 Mathews et al. [2002] 的估值。本文将采用如下的经验性方法由 \bar{A}_f^M 、 \bar{A}_s^M 推算 A_f 、 B_f 、 A_s 和 B_s 。

由于基于 PREM 模型的地球赤道主惯性矩 $\bar{A}^M = 8.0115 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$ 估值偏大 (见表 2.1)，可认为地核主惯性矩 \bar{A}_c^M 值也存在高估现象。根据 EGM2008 确定的零潮汐 A 、 B 值，假定可按照如下法则对 A_c 、 B_c 进行缩放

$$\frac{A+B}{2\bar{A}^M} = \frac{A_c+B_c}{2\bar{A}_c^M} \quad (2.28)$$

同时还假定地球内部赤道扁率随深度的衰减程度与极扁率相同，即认为

$$\frac{e_c}{e} = \frac{e'_c}{e'} \quad (2.29)$$

其中极扁率和赤道扁率分别定义如下

$$\begin{cases} e = \frac{C - (A+B)/2}{(A+B)/2}, & e' = \frac{B-A}{A} \\ e_c = \frac{C_c - (A_c+B_c)/2}{(A_c+B_c)/2}, & e'_c = \frac{B_c - A_c}{A_c} \end{cases} \quad (2.30)$$

且根据 EGM2008 确定的零潮汐 A 、 B 、 C 值可确定 e 和 e' 。由式 (2.30) 可得

$$\begin{cases} \frac{B_c}{A_c} = 1 + \frac{e_c}{e} \frac{B-A}{A} = x \\ A_c + B_c = \frac{A+B}{\bar{A}_c^M} \bar{A}_c^M = y \end{cases} \quad (2.31)$$

注意到本文 e 的估值也略小于 e^M ，因此 e_c 也应作类似缩放

$$\frac{e_c}{e_c^M} = \frac{e}{e^M} \quad (2.32)$$

于是 x 可由式 (2.31) 和 (2.32) 确定。最终，可得地核的主惯性矩为

$$\begin{cases} A_c = \frac{y}{1+x} \\ B_c = \frac{xy}{1+x} \\ C_c = (1+e_c) \frac{y}{2} \end{cases} \quad (2.33)$$

根据上述理论，地核（外核和内核）主惯性矩得以确定（见表 2.3）。

2.4 地球整体及内部圈层的动力学形状参数

基于 2.1~2.3 节的理论或数值结果，可建立一个包含地幔、外核和内核的三轴分层地球的动力学形状模型，相关数值列于表 2.3。其中，地球整体主惯性矩采用 EGM2008 确定的零潮汐值，地核主惯性矩为内、外核的相应主惯性矩之和，而地幔主惯性矩则为地球整体与地核的相应主惯性矩之差。

表 2.3 三轴分层地球模型参数

Table 2.3 Parameters for the triaxial-stratified Earth

参数		数值
	A	8.0100829
地球整体主惯性矩 ($\times 10^{37} \text{ kg m}^2$)	B	8.0102594
	C	8.0364807
	A_m	7.0985591
地幔主惯性矩 ($\times 10^{37} \text{ kg m}^2$)	B_m	7.0987194
	C_m	7.1225467
	A_c	9.1152379
地核主惯性矩 ($\times 10^{36} \text{ kg m}^2$)	B_c	9.1153996
	C_c	9.1393399
	A_f	9.0567171
液态外核主惯性矩 ($\times 10^{36} \text{ kg m}^2$)	B_f	9.0568779
	C_f	9.0806773
	A_s	5.8520816
固态内核主惯性矩 ($\times 10^{34} \text{ kg m}^2$)	B_s	5.8521767
	C_s	5.8662552
地球极扁率	e	3.2845161×10^{-3}
地球赤道扁率	e'	2.2033010×10^{-5}
液态外核极扁率	e_f	2.6455744×10^{-3}
液态外核赤道扁率	e'_f	1.7746896×10^{-5}
固态内核极扁率	e_s	2.4219766×10^{-3}
固态内核赤道扁率	e'_s	1.6246969×10^{-5}

由于在很多问题中三轴性影响并不明显,采用旋转对称地球模型既能保证精度,又能使相关问题的理论和实际处理大为简化(参见本文第四、五章),故在表 2.4 中也列出旋转对称分层地球模型的对应参数(其中 A 是表 2.3 中的 A 和 B 的平均值,即 $(A+B)/2$;其余类推)。在实际的理论或应用中可根据精度要求选择合适的地球模型参数,例如:在考虑大气、海洋等对极移和日长变化的激发作用时可不考虑地球三轴性,但研究 Chandler 晃动的椭率及频率-振幅变化时应考虑三轴性(参见第四章)。

表 2.4 旋转对称分层地球模型参数
Table 2.4 Parameters for the rotationally-symmetric and stratified Earth

参数		数值
地球整体主惯性矩 ($\times 10^{37}$ kg m ²)	A	8.0101711
	C	8.0364807
地幔主惯性矩 ($\times 10^{37}$ kg m ²)	A_m	7.0986392
	C_m	7.1225467
地核主惯性矩 ($\times 10^{36}$ kg m ²)	A_c	9.1153188
	C_c	9.1393399
液态外核主惯性矩 ($\times 10^{36}$ kg m ²)	A_f	9.0567975
	C_f	9.0806773
固态内核主惯性矩 ($\times 10^{34}$ kg m ²)	A_s	5.8521291
	C_s	5.8662552
地球极扁率	e	3.2845161×10^{-3}
液态外核极扁率	e_f	2.6455744×10^{-3}
固态内核极扁率	e_s	2.4219766×10^{-3}

2.5 本章小结与讨论

本章基于高精度全球重力场模型 EIGEN-GL05C 和 EGM2008 重新解算了地球惯性张量,并采用 IERS Conventions (2010) 推荐的 EGM2008 重力场模型和 MHB2000 地球模型联合推算了三轴分层地球模型的动力学形状参数。相对于 JGM-3 约 1 m 精度的全球大地水准面,EGM2008 确定的全球大地水准面精度约为 0.2 m。同时考虑到“流体静力平衡 + 地球模型 PREM”会明显高估地球主惯性矩值,我们有理由相信采用高精度重力场模型进行约束可给出更为可靠的地球动力学形状参数。这些基本参数的确定对于天文学、地球物理学和大地测量学等具有重要意义。

在求解主惯性矩的过程中,本文并没有像 Marchenko & Schwintzer [2003] 那样调整重力场模型的 GM_E 和 a 值。值得指出,在建立重力场模型时, GM_E 和 a 值被用作位系数的缩放常数,随意更换会引入系统误差。同时,基于 EIGEN-GL05C 和 EGM2008 两种模型得到的惯性张量结果相当一致。从这两个方面讲,本文认为没有必要人为调整 GM_E 和 a 值。

第三章 三轴性对章动的影响

3.1 Mathews 章动理论简介

沿用 Mathews et al. (1991a) 和 Mathews et al. (2002) 的理论, 地球整体及外核 (f)、内核 (s) 的转动惯量张量可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{I} = A\mathbf{E} + (C - A)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 + [(C_s - A_s) - (C' - A')](\mathbf{i}'_3\mathbf{i}'_3 - \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3) + \sum_{i,j} c_{ij}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j \\ \mathbf{I}_f = A_f\mathbf{E} + (C_f - A_f)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 + (C' - A')(\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 - \mathbf{i}'_3\mathbf{i}'_3) + \sum_{i,j} c_{ij}^f\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j \\ \mathbf{I}_s = A_s\mathbf{E} + (C_s - A_s)\mathbf{i}'_3\mathbf{i}'_3 + \sum_{i,j} c_{ij}^s\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 A 、 C 分别为赤道和极主惯性矩, \mathbf{E} 为单位张量, \mathbf{i}_3 和 \mathbf{i}'_3 分别为指向地幔形状轴的单位矢量; A' 和 C' 则对应于区域 V' , 它具有内核形状, 但密度均匀分布且等于在内外核边界处的外核密度 ρ_f 。

地球整体及外核、内核的角速度分别为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega} = \Omega_0(\mathbf{i}_3 + \mathbf{m}) \\ \boldsymbol{\Omega}_f = \Omega_0(\mathbf{i}_3 + \mathbf{m} + \mathbf{m}_f), \quad \boldsymbol{\omega}_f = \Omega_0\mathbf{m}_f \\ \boldsymbol{\Omega}_s = \Omega_0(\mathbf{i}_3 + \mathbf{m} + \mathbf{m}_s) \end{cases} \quad (3.2)$$

于是它们的角动量可分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{I}_f \cdot (\boldsymbol{\Omega}_f - \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{I}_s \cdot (\boldsymbol{\Omega}_s - \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{H}^{(R)} \\ \mathbf{H}_f = \mathbf{I}_f \cdot \boldsymbol{\Omega}_f \\ \mathbf{H}_s = \mathbf{I}_s \cdot \boldsymbol{\Omega}_s \end{cases} \quad (3.3)$$

设 $\mathbf{n}_s = \mathbf{i}'_3 - \mathbf{i}_3$, 则有

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\Gamma} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_f}{\partial t} - \boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\Gamma}_f^{em} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\Gamma}_s^p + \boldsymbol{\Gamma}_s^g + \boldsymbol{\Gamma}_s^c + \boldsymbol{\Gamma}_s^{em} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial t} = -\Omega_0(\mathbf{i}_3 \times \mathbf{m}_s) \end{cases} \quad (3.4)$$

式中, $\boldsymbol{\Gamma}$ 是引潮位 ϕ 引起的引潮力矩, $\boldsymbol{\Gamma}^p$ 、 $\boldsymbol{\Gamma}^g$ 、 $\boldsymbol{\Gamma}^c$ 、 $\boldsymbol{\Gamma}^{em}$ 分别对应于压力矩、引力矩、离心力矩和电磁力矩 (液态外核的角动量方程的推导参见附录 A)。显然, 式 (3.4) 同时顾及了地球外部引潮力矩和内部圈层之间的压力耦合、引力耦合和电磁耦合。这些力矩可分别表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma} \approx -\Omega_0^2 A e \mathbf{i}_3 \times \bar{\boldsymbol{\phi}}, \quad \bar{\boldsymbol{\phi}} = (\phi_1, \phi_2, 0) \\ \boldsymbol{\Gamma}_f^p + \boldsymbol{\Gamma}_f^g + \boldsymbol{\Gamma}_f^c \approx 0 \\ \boldsymbol{\Gamma}_s^p + \boldsymbol{\Gamma}_s^g + \boldsymbol{\Gamma}_s^c \approx \Omega_0^2 A_s e_s \mathbf{i}_3 \times [-\alpha_1 (\mathbf{m} + \mathbf{m}_f) + \alpha_2 \mathbf{n}_s - \alpha_3 \bar{\boldsymbol{\phi}}] + \Omega_0^2 \mathbf{i}_3 \times \mathbf{c}_3^s \\ \boldsymbol{\Gamma}_f^{em} = K_{CMB} A_f \Omega^2 \tilde{\mathbf{m}}_f, \quad \tilde{\mathbf{m}}_f = (m_{f2}, m_{f1}, 0) \\ \boldsymbol{\Gamma}_s^{em} = K_{ICB} A_s \Omega^2 (\tilde{\mathbf{m}}_s - \tilde{\mathbf{m}}_f), \quad \tilde{\mathbf{m}}_s = (m_{s2}, m_{s1}, 0) \end{cases} \quad (3.5)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 - \alpha_3 = \frac{A' e'}{A_s e_s} \\ \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_g \\ \alpha_g = \frac{8\pi g}{5\Omega_0^2} \left[\int_{a_s}^a \rho(a') \frac{d\varepsilon(a')}{da'} da' + \rho_f \varepsilon_s \right] \end{cases} \quad (3.6)$$

将式 (3.1)–(3.3) 和 (3.5)–(3.6) 代入式 (3.4)，略去 $m_i m_j$ 、 $m_i c_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) 以及更高阶小量，可得式 (3.4) 的线性化形式，进而采用复数记法 (即 $\tilde{m} = m_1 + im_2$ ， $\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \phi_1 + i\phi_2$) 可得

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} - ie\Omega_0 \right) \tilde{m} + \frac{1}{A} \left(\frac{d}{dt} + i\Omega_0 \right) (\alpha_3 e_s A_s \tilde{n}_s + \tilde{c}_3 + A_f \tilde{m}_f + A_s \tilde{m}_s + \Omega_0^{-1} \tilde{H}^{(R)}) = -ie\Omega_0 \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ \left(\frac{d}{dt} - i\Omega_0 (1 + e_f) \right) \tilde{m}_f + \frac{d}{dt} \left[\tilde{m} - \frac{1}{A_f} (\alpha_1 e_s A_s \tilde{n}_s - \tilde{c}_3^f) \right] = 0 \\ \left(\frac{d}{dt} + i\Omega_0 \right) (\tilde{m}_s + e_s \tilde{n}_s + \frac{1}{A_s} \tilde{c}_3^s) + \left(\frac{d}{dt} - ie_s \Omega_0 \right) \tilde{m} = i\Omega_0 \left[e_s [-\alpha_1 (\tilde{m} + \tilde{m}_f) + \alpha_2 \tilde{n}_s - \alpha_3 \tilde{\boldsymbol{\phi}}] + \frac{1}{A_s} \tilde{c}_3^s \right] \\ \frac{d\tilde{n}_s}{dt} = -i\Omega_0 \tilde{m}_s \end{cases} \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{cases} c_3 = A[\kappa(\tilde{m} - \tilde{\boldsymbol{\phi}}) + \xi \tilde{m}_f + \zeta \tilde{m}_s] \\ c_{f3} = A_f[\gamma(\tilde{m} - \tilde{\boldsymbol{\phi}}) + \beta \tilde{m}_f + \delta \tilde{m}_s] \\ c_{s3} = A_s[\theta(\tilde{m} - \tilde{\boldsymbol{\phi}}) + \chi \tilde{m}_f + \nu \tilde{m}_s] \end{cases} \quad (3.8)$$

为引潮力和自转引起的地球形变 (无量纲引潮力位 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ 的推导参见附录 B)。

为求解分层地球的自转本征模，需将式 (3.7) 转换到频域中。这相当于式 (3.7) 作如下代换 (取频率 σ 单位为周每恒星日，cpsd)

$$\begin{cases} x \rightarrow x e^{i\sigma\Omega_0 t} \\ \frac{d}{dt} \rightarrow i\sigma\Omega_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

并将式 (3.7) 写成矩阵形式

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \tilde{\boldsymbol{\phi}}\mathbf{y} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma + (1 + \sigma)\kappa - e & (1 + \sigma)(\xi + A_f/A) & (1 + \sigma)(\zeta + A_s/A) & (1 + \sigma)\alpha_3 e_s A_s/A \\ \sigma(1 + \gamma) & 1 + \sigma(1 + \beta) + e_f + K^{CMB} + K^{ICB} A_s/A_f & \sigma\delta - K^{ICB} A_s/A_f & -\sigma\alpha_1 e_s A_s/A_f \\ \sigma(1 + \theta) - \alpha_3 e_s & \sigma\chi + \alpha_1 e_s - K^{ICB} & 1 + \sigma(1 + \nu) + K^{ICB} & (1 + \sigma - \alpha_2) e_s \\ 0 & 0 & 1 & \sigma \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{m}_f \\ \tilde{m}_s \\ \tilde{n}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} (1+\sigma)\kappa - e \\ \sigma\gamma \\ \sigma\theta - \alpha_3 e_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

式 (3.10)~(3.12) 描述了地球的耦合运动, 是求解转换函数的基础。其中, σ 为潮汐频率, (κ, ξ, ζ) 、 (γ, β, δ) 、 (θ, χ, ν) 分别是描述地球整体、外核、内核形变能力的参数; K^{CMB} 、 K^{ICB} 则分别是核幔边界、内外核边界处的电磁耦合系数; $e = (C - A)/A$ 为动力学扁率, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为辅助参量 (参见表 1, 其中数据均基于 PREM 模型)。

表 3.1 MHB2000 地球模型参数

Table 3.1 Parameters of the MHB2000 Earth model

参数		数值
主惯性矩 (kg m ²)	A	8.0115×10^{37}
	A_f	9.0583×10^{36}
	A_s	5.8531×10^{34}
	A'	5.5389×10^{34}
	e	3.2845479×10^{-3}
动力学扁率	e_f	2.6456×10^{-3}
	e_s	2.422×10^{-3}
	e'	2.422×10^{-3}
	辅助参量	α_1
α_2		0.8294
α_3		0.0537
形变参数	κ	1.0340×10^{-3}
	ξ	2.222×10^{-4}
	ζ	4.964×10^{-9}
	γ	1.9662×10^{-3}
	β	6.160×10^{-4}
	δ	-4.869×10^{-7}
	θ	6.794×10^{-6}
	χ	-7.536×10^{-5}
	ν	7.984×10^{-5}
	电磁耦合系数	K^{CMB}
K^{ICB}		$(1.11 - 0.78i) \times 10^{-3}$

对于刚体地球, \tilde{m}_f 、 \tilde{m}_s 、 \tilde{n}_s , 以及形变参数和内部耦合系数等均为 0, 此时由式 (3.10)~(3.12) 可得

$$\tilde{m}_R(\sigma) = \frac{e_R}{e_R - \sigma} \tilde{\phi}(\sigma), \quad \tilde{w}_R = \frac{\tilde{m}_R(\sigma)}{\tilde{\phi}(\sigma)} = \frac{e_R}{e_R - \sigma} \quad (3.13)$$

其中下标 R 表示对应于刚体情形。

将矩阵 \mathbf{M} 作如下分解

$$\mathbf{M} = \sigma \begin{bmatrix} 1+\kappa & \xi + A_f/A & \zeta + A_s/A & \alpha_3 e_s A_s/A \\ 1+\gamma & 1+\beta & \delta & -\alpha_1 e_s A_s/A_f \\ 1+\theta & \chi & 1+\nu & e_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e-\kappa & -\xi - A_f/A & -\zeta - A_s/A & -\alpha_3 e_s A_s/A \\ 0 & -1 - e_f - K^{\text{CMB}} - K^{\text{ICB}} A_s/A_f & K^{\text{ICB}} A_s/A_f & 0 \\ \alpha_3 e_s & K^{\text{ICB}} - \alpha_1 e_s & -1 - K^{\text{ICB}} & (\alpha_2 - 1)e_s \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$= \sigma \mathbf{F} - \mathbf{G} = \mathbf{F}(\sigma \mathbf{E} - \mathbf{L})$$

其中 \mathbf{E} 为单位阵，而 $\mathbf{L} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}$ 。令行列式

$$|\mathbf{F}(\sigma \mathbf{E} - \mathbf{L})| = 0 \quad (3.15)$$

即可解得 4 个特征值 (舍去高阶小量)

$$\begin{cases} \sigma_{\text{CW}} = \frac{A}{A_m} (e - \kappa) \\ \sigma_{\text{FCN}} = - \left(1 + \frac{A_f}{A_m} \right) \left(e_f - \beta + K^{\text{CMB}} + K^{\text{ICB}} \frac{A_s}{A_f} \right) - 1 \\ \sigma_{\text{FICN}} = \left(1 + \frac{A_s}{A_m} \right) (\alpha_2 e_s + \nu - K^{\text{ICB}}) - 1 \\ \sigma_{\text{ICW}} = (1 - \alpha_2) e_s \end{cases} \quad (3.16)$$

这些频率分别对应于 Chandler 晃动、自由核章动、自由内核章动和内核晃动。

利用式 (3.16) 中的 4 个特征值由下式可得到矩阵 \mathbf{M} 的单位特征向量

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\sigma_\alpha \mathbf{E} - \mathbf{L}) \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_\alpha \mathbf{F}(\sigma_\alpha \mathbf{E} - \mathbf{L}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_\alpha \mathbf{v}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \\ \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{E} \end{cases} \quad (3.17)$$

其中 \mathbf{u}_α 和 \mathbf{v}_α 分别为列矢量和行矢量， $\delta_{\alpha\beta}$ 为 Kronecher- δ 函数，而下标 $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ 则分别对应于式 (3.16) 中的下标 CW、FCN、FICN 和 ICW。由于 $\mathbf{v}_\alpha \mathbf{L} = \sigma_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ ， $\mathbf{L} \mathbf{u}_\alpha = \sigma_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ ，可知

$$(\sigma \mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1} = \sum_\alpha \frac{\mathbf{u}_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\sigma - \sigma_\alpha} \quad (3.18)$$

将式 (3.12) 中的 \mathbf{y} 分解为

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \kappa - e \\ 0 \\ -\alpha_3 e_s \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \kappa \\ \gamma \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}_c + \sigma \mathbf{y}_t \quad (3.19)$$

注意到 $\mathbf{x} = \tilde{\phi} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}$ ， $\mathbf{M}^{-1} = (\sigma \mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{F}^{-1}$ ，于是

$$\frac{\mathbf{x}}{\tilde{\phi}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{y}_t + \sum_\alpha \frac{\mathbf{u}_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{y}_c + \sigma_\alpha \mathbf{y}_t)}{\sigma - \sigma_\alpha} \quad (3.20)$$

式 (3.20) 是一个列矢量，在建立章动序列时只需考虑它的第一行值。令

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(\sigma) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix}_1 = \frac{\tilde{m}(\sigma)}{\tilde{\phi}(\sigma)} \\
\tilde{w}_0 &= [\mathbf{F}^{-1} \mathbf{y}_t]_1 \\
\tilde{w}_\alpha &= [\mathbf{u}_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{y}_c + \sigma_\alpha \mathbf{y}_t)]_1
\end{aligned} \tag{3.21}$$

其中下标 1 表示取第一行。则由式 (3.20) 可知

$$\tilde{w}(\sigma) = \tilde{w}_0 + \sum_\alpha \frac{\tilde{w}_\alpha}{\sigma - \sigma_\alpha} \tag{3.22}$$

由于当 $\sigma = -1$ 时， $\tilde{w}(\sigma)$ 的值类似于刚体情况，即 $e/(e - \sigma)$ ，故有

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(-1) &= \tilde{w}_0 - \sum_\alpha \frac{\tilde{w}_\alpha}{1 + \sigma_\alpha} = \frac{e}{1 + e} \\
\tilde{w}_0 &= \frac{e}{1 + e} + \sum_\alpha \frac{\tilde{w}_\alpha}{1 + \sigma_\alpha}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

于是

$$\tilde{w}(\sigma) = \frac{e}{1 + e} + \sum_\alpha \frac{(1 + \sigma)\tilde{w}_\alpha}{(1 + \sigma_\alpha)(\sigma - \sigma_\alpha)} \tag{3.24}$$

设章动幅度为 $\tilde{\eta}(\sigma)$ ，对应于某一潮汐频率 σ ，存在章动转换函数

$$T(\sigma) = \frac{\tilde{\eta}(\sigma)}{\tilde{\eta}_R(\sigma)} = \frac{\tilde{m}(\sigma)}{\tilde{m}_R(\sigma)} \tag{3.25}$$

将式 (3.13)、(3.24) 代入式 (3.25) 中，有

$$T(\sigma) = \frac{e(e_R - \sigma)}{e_R(e + 1)} \left[1 + \sum_\alpha \frac{(1 + \sigma)N_\alpha}{\sigma - \sigma_\alpha} \right], \quad N_\alpha = \frac{e + 1}{e} \frac{\tilde{w}_\alpha}{1 + \sigma_\alpha} \tag{3.26}$$

考虑到共振系数 N_α 具有频率依赖性 (假定在周日频段为线性依赖)，有

$$T_0(\sigma; e|e_R) = N_0 \frac{e_R - \sigma}{e_R + 1} \left[1 + (1 + \sigma) \left(Q_0 + \sum_\alpha \frac{Q_\alpha}{\sigma - s_\alpha} \right) \right] \tag{3.27}$$

上式即为 MHB2000 章动转换函数的最终表达式。

3.2 Mathews 章动理论的推广

Mathews et al. [1991a] 和 Mathews et al. [2002] 的章动理论没有考虑地球的三轴性，其理论中的 A 、 A_f 、 A_s 实际上分别表示地球、外核和内核的平均赤道主惯性矩。由于地球各圈层的三轴性均很弱，只有地球整体的三轴性对章动有较大影响，故本节暂只考虑地球整体的三轴性。若以 A_0 、 B_0 、 C_0 表示三轴地球的主惯性矩，则有

$$\begin{aligned}
A &= \frac{A_0 + B_0}{2}, \quad C = C_0, \quad D = -\frac{A_0 - B_0}{2} \\
A_0 &= A - D, \quad B_0 = A + D
\end{aligned} \tag{3.28}$$

对于式 (3.4) 的第一式 $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\Gamma}$ ，采用表述 $H = H_1 + iH_2$ ， $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$ ，并分解为零阶、一阶和二阶量 (分别用上标 (0)、(1)、(2) 表示)：

$$\begin{aligned}
H &= H^{(1)} + H^{(2)}, \quad H_3 = H_3^{(0)} + H_3^{(1)} + H_3^{(2)} \\
\Gamma &= \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

于是

$$\frac{dH^{(1)}}{dt} + i(H^{(1)} - H_3^{(0)}m)\Omega_0 = \Gamma^{(1)} + \Delta^{(2)} \quad (3.30)$$

$$\Delta^{(2)} = \Gamma^{(2)} - \left(\frac{dH^{(2)}}{dt} + i\Omega_0 H^{(2)} \right) - i\Omega_0 (H^{(1)}m_3 - H_3^{(1)}m) \quad (3.31)$$

式 (3.29) 中零阶、一阶和二阶量可分别表示为 (除表征三轴性的 $H^{(2)}$ 外, 其余参见 Mathews et al. [2002] 和 Lambert & Mathews [2006]):

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= \Omega_0 (Am + A_f m_f + A_s m_s + c) \\ H^{(2)} &= -\Omega_0 Dm^*, \quad m^* = m_1 - im_2 \\ H_3^{(0)} &= \Omega_0 C \\ H_3^{(1)} &= \Omega_0 (Cm_3 + C_f m_{f3} + C_s m_{s3} + c_{33}) \\ \Gamma^{(1)} &= -i(C - A)\phi \\ \Gamma^{(2)} &= \Gamma_{20}^{(2)} + \Gamma_{21}^{(2)} + \Gamma_{22}^{(2)} \\ \Gamma_{20}^{(2)} &= -i\Omega_0^2 \phi_{20} c = i\kappa_{21} A \Omega_0^2 \phi_{20} \phi_{21} \\ \Gamma_{21}^{(2)} &= i\Omega_0^2 \left[\frac{3}{2} c_{33} \phi_{21} - (c_{11}^S + ic_{12}) \phi_{21}^* \right] = iA \Omega_0^2 (\kappa_{20} \phi_{20} + \kappa_{22} \phi_{22}) \phi_{21} \\ \Gamma_{22}^{(2)} &= 2i\Omega_0^2 \phi_{22} c^* = -2i\kappa_{21} A \Omega_0^2 \phi_{22} \phi_{21}^* \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中 $\Gamma^{(2)}$ 可进一步化为

$$\Gamma^{(2)} = iA \Omega_0^2 \left[\kappa_{21} (\phi_{20} \phi_{21} - 2\phi_{22} \phi_{21}^*) + (\kappa_{20} \phi_{20} + \kappa_{22} \phi_{22}) \phi_{21} \right] \quad (3.33)$$

将式 (3.32)、(3.33) 代入式 (3.31) 可得

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)} &= \Gamma^{(2)} + \Omega_0 D(\dot{m}^* + i\Omega_0 m^*) + i\Omega_0^2 (C - A)mm_3 \\ &\rightarrow iA \Omega_0^2 \left[\kappa_{21} (\phi_{20} \phi_{21} - 2\phi_{22} \phi_{21}^*) + (\kappa_{20} \phi_{20} + \kappa_{22} \phi_{22}) \phi_{21} \right] + i\Omega_0^2 D(1 + \sigma)m^* + i\Omega_0^2 (C - A)mm_3 \end{aligned} \quad (3.34)$$

其中“ \rightarrow ”表示转换到频域中。

对于无形变的刚体地球, 式 (3.32) 退化为

$$\begin{aligned} H_R^{(1)} &= \Omega_0 Am \\ H_R^{(2)} &= -\Omega_0 Dm^*, \quad m^* = m_1 - im_2 \\ H_{R3}^{(0)} &= \Omega_0 C \\ H_{R3}^{(1)} &= \Omega_0 Cm_3 \\ \Gamma_R^{(1)} &= -i(C - A)\phi \\ \Gamma_R^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

式 (3.31) 则退化为

$$\Delta_R^{(2)} = - \left(\frac{dH_R^{(2)}}{dt} + i\Omega_0 H_R^{(2)} \right) - i\Omega_0 (H_R^{(2)}m_3 - H_{R3}^{(1)}m) \rightarrow i\Omega_0^2 [D(1 + \sigma)m^* + (C - A)mm_3] \quad (3.36)$$

以上诸式中极移参数可由

$$m(\sigma) = T_0(\sigma)m_R(\sigma) = T_0(\sigma) \frac{e_R}{e_R - \sigma} \phi(\sigma) \quad (3.37)$$

确定, 其中 T_0 即为式 (3.27) 给定的章动转换函数。

注意到

$$\frac{dH^{(1)}}{dt} + i(H^{(1)} - H_3^{(0)}m)\Omega_0 \rightarrow i\Omega_0^2 A(\sigma - e)m \quad (3.38)$$

故对于非刚体和刚体地球，由式 (3.30) 可知二阶小量引起的极移增量 δm 和 δm_R 分别满足

$$\begin{aligned} i\Omega_0^2 A(\sigma - e)\delta m &= \Delta^{(2)} \\ i\Omega_0^2 A(\sigma - e)\delta m_R &= \Delta_R^{(2)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

即

$$\begin{cases} \delta m = \frac{A[\kappa_{21}(\phi_{20}\phi_{21} - 2\phi_{22}\phi_{21}^*) + (\kappa_{20}\phi_{20} + \kappa_{22}\phi_{22})\phi_{21}] + D(1 + \sigma)m^* + (C - A)mm_3}{A(\sigma - e)} \\ \delta m_R = \frac{D(\sigma + 1)m^* + (C - A)mm_3}{A(\sigma - e_R)} \end{cases} \quad (3.40)$$

根据转换函数的定义，易知顾及二阶小量的章动转换函数可表述为

$$T = \frac{m + \delta m}{m_R + \delta m_R} \quad (3.41)$$

其分母可展开为

$$\frac{1}{m_R + \delta m_R} = \frac{1}{m_R} \frac{1}{1 - (-\delta m_R/m_R)} = \frac{1}{m_R} \left[1 - \frac{\delta m_R}{m_R} + \left(\frac{\delta m_R}{m_R} \right)^2 + \dots \right] \quad (3.42)$$

故精确到一阶项，式 (3.41) 可改写为

$$T = \frac{m + \delta m}{m_R} \left(1 - \frac{\delta m_R}{m_R} \right) = \frac{m}{m_R} \left(1 - \frac{\delta m_R}{m_R} \right) + \frac{\delta m}{m_R} \quad (3.43)$$

注意到 $T_0 = m/m_R$ ，则

$$T = \left(1 - \frac{\delta m_R}{m_R} \right) T_0 + \frac{\delta m}{m_R} \quad (3.44)$$

根据式 (3.44)、(3.40)、(3.27) 和 (3.13) 即可确定顾及二阶小量的章动转换函数。

仅考虑三轴性影响时，有

$$\begin{cases} \delta m = \frac{D(1 + \sigma)m^*}{A(\sigma - e)} \\ \delta m_R = \frac{D(\sigma + 1)m^*}{A(\sigma - e_R)} \end{cases} \quad (3.45)$$

设 $\gamma_0 = (B_0 - A_0)/C_0$ ，可知

$$\left. \begin{aligned} B_0 - A_0 &= \gamma_0 C_M \\ B_0 + A_0 &= 2A_M \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{D}{A} = \frac{B_0 - A_0}{B_0 + A_0} = \frac{\gamma_0}{2}(1 + e) \quad (3.46)$$

于是式 (3.40) 简化为

$$\begin{cases} \delta m = \frac{\gamma_0(1 + \sigma)(1 + e)}{2(\sigma - e)} m^* \\ \delta m_R = \frac{\gamma_0(1 + \sigma)(1 + e)}{2(\sigma - e_R)} m^* \end{cases} \quad (3.47)$$

顾及式 (3.13) 和 (3.47)，有

$$\begin{cases} \frac{\delta m}{m_R} = \frac{\gamma_0(1+\sigma)(1+e)}{2(\sigma-e)} \frac{\tilde{\phi}^*}{\tilde{\phi}} T_0^* \equiv E_T T_0^* \\ \frac{\delta m_R}{m_R} = \frac{\gamma_0(1+\sigma)(1+e_R)}{2(\sigma-e_R)} \frac{\tilde{\phi}^*}{\tilde{\phi}} T_0^* \equiv E_T^R T_0^* \end{cases} \quad (3.48)$$

于是式 (3.44) 可改写为

$$T = (1 - E_T^R T_0^*) T_0 + E_T T_0^* \quad (3.49)$$

则三轴性导致的章动转换函数增量可表述为

$$\delta T_{Tri} = T - T_0 = (E_T - E_T^R T_0^*) T_0^* \quad (3.50)$$

故三轴性对章动的贡献为

$$\begin{aligned} \delta \eta(\sigma) &= \eta_R(\sigma) \delta T_{Tri}(\sigma) = (E_T - E_T^R T_0^*) T_0^* \eta_{REN} \\ &= (E_T/T_0 - E_T^R) T_0^* \eta_{MHB} \end{aligned} \quad (3.51)$$

注意到

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \Delta X + i \Delta Y = \Delta \psi \sin \varepsilon_0 + i \Delta \varepsilon \\ \Delta \psi &= \sum_i [(A_i + A_i' t) \sin(\arg_i) + A_i'' \cos(\arg_i)] \\ \Delta \varepsilon &= \sum_i [(B_i + B_i' t) \cos(\arg_i) + B_i'' \sin(\arg_i)] \end{aligned} \quad (3.52)$$

其中，章动系数 $[A_i, A_i', A_i'', B_i, B_i', B_i'']$ 构成的数表即为 IAU2000A_{R06} 章动模型。根据式 (3.51) 和 (3.52)，三轴性导致的章动系数增量可表示为

$$\begin{bmatrix} \delta A_i \\ \delta A_i' \\ \delta A_i'' \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \delta B_i \\ \delta B_i' \\ \delta B_i'' \end{bmatrix} = (E_T/T_0 - E_T^R) T_0^* \left\{ \begin{bmatrix} A_i \\ A_i' \\ A_i'' \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} B_i \\ B_i' \\ B_i'' \end{bmatrix} \right\} \quad (3.53)$$

由 $[\delta A_i, \delta A_i', \delta A_i'', \delta B_i, \delta B_i', \delta B_i'']$ 构成的数表即为考虑了地球三轴性的章动修正模型。

3.3 顾及地球三轴性的章动修正模型

由于 IAU2000 章动模型截断误差为 0.001 mas [Mathews et al., 2002]，实际误差则为 0.2 mas (不考虑自由核章动影响) 或 0.5 mas (考虑自由核章动影响) [Petit & Luzum, 2010]，故本文考虑地球三轴性建立的章动修正模型也应截断至 0.001 mas。根据式 (3.53) 定量计算后 (计算程序改写自 IAU 标准程序包 Standards of Fundamental Astronomy, SOFA [Wallace, 1998])，本文发现共有 13 项振幅超过 0.001 mas，它们分别对应于 IAU2000 模型中的第 1、2、3、4、5、6、7、10、11、18、37、53 和 64 项。表 3.2 列出了对应项的天文参数、周期和基于 HW95 模型的引潮力位系数；表 3.3 列出了 IAU2000A_{R06} 模型的对应项；表 3.4 则给出了三轴性导致的章动模型修正值。图 3.1 则刻画了 2000—2050 年时段内三轴性对章动值的影响。

表 3.2 相关章动项的天文参数、周期和对应引潮力系数

Table 3.2 Arguments, periods and corresponding TGP coefficients of the relevant nutation terms

No.	τ	s	h	P	N'	周期 (天)	C_{nm}	S_{nm}
1	0	0	0	0	1	-6798.383	771788513	0
2	0	0	2	-2	2	182.621	-856534056	0
3	0	0	2	0	2	13.661	-1841039981	0
4	0	0	0	0	2	-3399.192	-7533553	0
5	0	1	0	0	0	365.260	-136032244	0
6	0	1	2	-2	2	121.749	-50069043	0
7	1	0	0	0	0	27.555	-972501389	0
10	0	-1	2	-2	2	365.225	7156882	0
11	0	0	2	-2	1	177.844	21335877	0
18	-2	0	2	0	1	1305.479	1046384	0
37	-2	0	2	0	0	1095.175	402041	0
53	-2	0	2	0	2	1615.748	-22947	0
64	-1	1	0	1	0	3232.862	-39838	0

表 3.3 IAU2000A_{R06} 模型的相关章动项

Table 3.3 Relevant nutation terms of the IAU2000A_{R06} model

No.	A (0.1 μas)	A' (0.1 $\mu\text{as}/\text{cent}$)	A'' (0.1 $\mu\text{as}/\text{cent}^2$)	B (0.1 μas)	B' (0.1 $\mu\text{as}/\text{cent}$)	B'' (0.1 $\mu\text{as}/\text{cent}^2$)
1	-172064161	-174666	33386	92052331	9086	15377
2	-13170906	-1675	-13696	5730336	-3015	-4587
3	-2276413	-234	2796	978459	-485	1374
4	2074554	207	-698	-897492	470	-291
5	1475877	-3633	11817	73871	-184	-1924
6	-516821	1226	-524	224386	-677	-174
7	711159	73	-872	-6750	0	358
10	215829	-494	111	-95929	299	132
11	128227	137	181	-68982	-9	39
18	45893	50	31	-24236	-10	20
37	-11024	0	-14	104	0	2
53	-3075	0	-2	1313	0	-1
64	3276	0	1	-9	0	0

根据式 (3.53), 若不考虑共振效应, 三轴性的影响大致正比于 IAU2000A_{R06} 模型的章动项。但比较表 3.3 和 3.4 可知, 由于自由核章动的影响, 周期大于半年的章动项均表现出不同程度的共振效应, 而在第 1、4、5、10、18 和 53 项尤为明显。值得指出, 第 5、10 项还受到 Euler 频率的共振影响 (参见式 (3.48), 其分母为 $\sigma - e$ 或 $\sigma - e_R$; e 或 e_R 即为 Euler 频率)。

表 3.4 三轴性贡献大于 0.001 mas 的章动项*

Table 3.4 Nutation corrections due to the Earth's triaxiality with amplitudes larger than 0.001 mas*

No.	δA (mas)	$\delta A'$ (mas/cent)	$\delta A''$ (mas/cent ²)	δB (mas)	$\delta B'$ (mas/cent)	$\delta B''$ (mas/cent ²)
1	2.7527	0.0025	-0.0004	-0.6413	0.0005	-0.0003
2	-0.1247	0	-0.0001	0.0127	0	-0.0001
3	-0.0029	0	0	0.0001	0	0
4	-0.0420	0	0	0.0058	0	0
5	0.0283	-0.0001	0.0002	0.0107	0	0
6	-0.0032	0	0	0.0003	0	0
7	0.0011	0	0	0.0004	0	0
10	0.0048	0	0	-0.0005	0	0
11	0.0012	0	0	-0.0002	0	0
18	0.0172	0	0	-0.0021	0	0
37	-0.0018	0	0	-0.0006	0	0
53	-0.0039	0	0	0	0	0
64	0.0016	0	0	0.0002	0	0

* 此表中 0 表示该值的绝对值小于 0.0001 mas

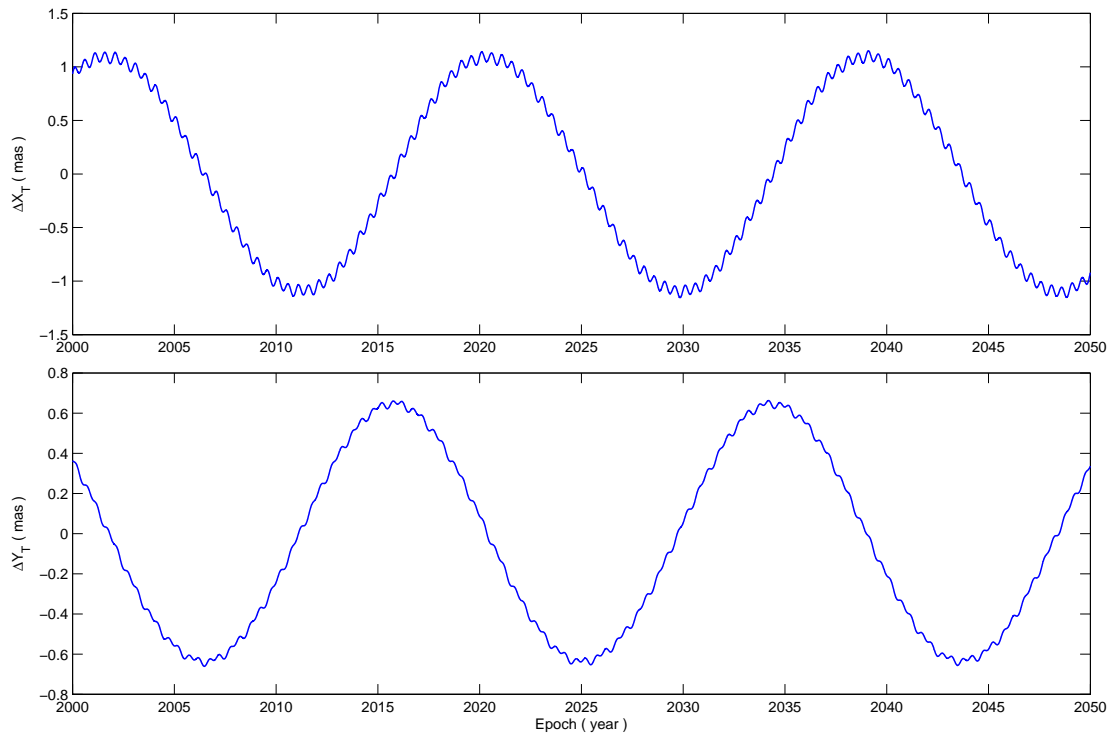


图 3.1 地球三轴性对章动 X、Y 分量的影响

Fig. 3.1 Effects of the Earth's triaxiality on the X and Y nutation components

3.4 本章小结与讨论

本章简要介绍了基于旋转对称地球模型的 Mathews 章动理论，并进而将其扩展到三轴分层地球模型，确定了三轴性导致的章动转换函数增量及章动值的变化。本章的数值结果表明地球三轴性对章动的影响是不应忽略的：若精确到 0.001 mas，IAU2000_{R06} 章动序列中将有 13 项需作三轴性改正，其中最大的 18.6 年项的三轴性改正可达约 2 mas。

不过，本文所指的三轴性影响实际上仅包括了地球动力学形状的影响，没有涉及三轴性地幔、外核和内核之间的耦合作用。三轴分层地球的核幔耦合显然不同于旋转对称地球，两种耦合的差异对章动的影响有可能不容忽视 [黄乘利, 2011]。因此，后续研究将进一步考虑由三轴分层的地幔、外核和内核之间的耦合对章动的影响。

第四章 三轴分层地球的极移

4.1 地球自转动力学方程

对于极移和日长变化的研究, 采用由地幔和液核构成的两层地球模型即可满足精度要求。这是因为: 引起极移和日长变化的物理过程 (如大气、海洋、陆地水、地核等的运动和质量迁移) 的规则程度和可预报性远不如引起章动的物理过程 (日、月和行星等的引力作用); 大气、海洋、陆地水、地核等激发作用估计值的误差非常大, 可达数个甚至数十个毫角秒 [参见第六章]。因此, 章动理论可达到 (也需要达到) 极高精度, 而极移和日长变化理论的精度需求则低得多, 故在章动理论中需考虑的内核影响在极移和日长变化中可完全忽略 (根据 Mathews et al. [1991b], 内核对章动的影响约在 0.1 mas 量级, 其对极移的影响量级应当也在此量级左右)。

当考虑地球三轴性时, 参考系可选择地幔平均主惯性轴坐标系, 或者说, 地幔的 Tisserand 轴坐标系 (MTS) [Munk & MacDonald, 1960; Lambeck, 1980]。选取 MTS 可使得惯性张量的变化部分 (表现为形变项 c'_{ij} 和 c'_{ji} ($i, j=1, 2, 3$. 见式 (4.3)) 足够小, 以致于可忽略它们与自身或其它小量的乘积。同时, 该参考系绕地幔的平均自转轴以角速率 Ω 匀速旋转。在此坐标系中, 地球整体和液核的动力学方程可表示为 [Sasao et al., 1980; Mathews et al., 1991a; Jochmann, 2009]

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{L} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_f}{\partial t} - \Delta \boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{H}_f = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

其中, \mathbf{L} 为外力矩, $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_f = \boldsymbol{\omega} + \Delta \boldsymbol{\omega}_f$ 分别为地幔和液核的角速度, 而

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \mathbf{I}_m \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_f \cdot \boldsymbol{\omega}_f + \mathbf{h} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_f \cdot \Delta \boldsymbol{\omega}_f + \mathbf{h} \\ \mathbf{H}_f = \mathbf{I}_f \cdot \boldsymbol{\omega}_f + \mathbf{h}_f = \mathbf{I}_f \cdot (\boldsymbol{\omega} + \Delta \boldsymbol{\omega}_f) + \mathbf{h}_f \end{cases} \quad (4.2)$$

分别为地球整体及液核的角动量。式 (4.2) 中, $\mathbf{I}, \mathbf{I}_m, \mathbf{I}_f$ 分别为地球整体、地幔和液核的惯性张量, \mathbf{h} 和 \mathbf{h}_f 分别为地球整体和液核的相对角动量。 $\mathbf{I}, \mathbf{I}_m, \mathbf{I}_f$ 可分别表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} A + c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} \\ c'_{12} & B + c'_{22} & c'_{23} \\ c'_{13} & c'_{23} & C + c'_{33} \end{bmatrix} \\ \mathbf{I}_m &= \mathbf{I} - \mathbf{I}_f \\ \mathbf{I}_f &= \begin{bmatrix} A_f + c'_{f11} & c'_{f12} & c'_{f13} \\ c'_{f12} & B_f + c'_{f22} & c'_{f23} \\ c'_{f13} & c'_{f23} & C_f + c'_{f33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中, 地球整体和液核的主惯性矩 (A, B, C) 和 (A_f, B_f, C_f) 均假定为常数, 而 c'_{ij} 和 c'_{ji} ($i, j=1, 2, 3$) 则表示形变引起的惯性张量的时变部分。同时, 地球整体与液核的角速度可分别表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega} = (m_1, m_2, 1 + m_3) \Omega \\ \boldsymbol{\omega}_f = \boldsymbol{\omega} + \Delta \boldsymbol{\omega}_f = \boldsymbol{\omega} + \Omega (m_{f1}, m_{f2}, m_{f3}) \end{cases} \quad (4.4)$$

将式 (4.3) 和 (4.4) 代入式 (4.2) 中并保留到一阶项, 可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} = \Omega \begin{bmatrix} Am_1 + A_f m_{f1} + c'_{13} \\ Bm_2 + B_f m_{f2} + c'_{23} \\ C(1+m_3) + C_f m_{f3} + c'_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_f = \Omega \begin{bmatrix} A_f(m_1 + m_{f1}) + c'_{f13} \\ B_f(m_2 + m_{f2}) + c'_{f23} \\ C_f(1+m_3 + m_{f3}) + c'_{f33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{f1} \\ h_{f2} \\ h_{f3} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

由式 (4.1) 和 (4.5) 可得到三轴分层地球自转动力学方程的标量形式:

$$\begin{cases} A\Omega\dot{m}_1 + (C-B)\Omega^2 m_2 + A_f\Omega\dot{m}_{f1} - B_f\Omega^2 m_{f2} = \Omega^2 c'_{23} - \Omega\dot{c}'_{13} + \Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1 \\ B\Omega\dot{m}_2 - (C-A)\Omega^2 m_1 + B_f\Omega\dot{m}_{f2} + A_f\Omega^2 m_{f1} = -\Omega^2 c'_{13} - \Omega\dot{c}'_{23} - \Omega h_1 - \dot{h}_2 + L_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$C\Omega\dot{m}_3 + C_f\Omega\dot{m}_{f3} = -\Omega\dot{c}'_{33} - \dot{h}_3 + L_3 \quad (4.7)$$

及

$$\begin{cases} A_f\Omega\dot{m}_1 + A_f\Omega\dot{m}_{f1} - C_f\Omega^2 m_{f2} = -\Omega\dot{c}'_{f13} - \dot{h}_{f1} \\ B_f\Omega\dot{m}_2 + B_f\Omega\dot{m}_{f2} + C_f\Omega^2 m_{f1} = -\Omega\dot{c}'_{f23} - \dot{h}_{f2} \end{cases} \quad (4.8)$$

$$C_f\Omega\dot{m}_3 + C_f\Omega\dot{m}_{f3} = -\Omega\dot{c}'_{f33} - \dot{h}_{f3} \quad (4.9)$$

根据式 (4.7) 和 (4.9) 易得

$$(C - C_f)\Omega\dot{m}_3 = -\Omega(\dot{c}'_{33} - \dot{c}'_{f33}) - (\dot{h}_3 - \dot{h}_{f3}) + L_3 \quad (4.10)$$

表征自转速率变化的式 (4.10) 显然与传统自转理论 (假定地球旋转对称) 相同, 其解也与传统解一致; 描述极移的式 (4.6) 与 (4.8) 则不同于传统理论, 这表明三轴性主要体现在极移方面, 对自转速率则几乎没有影响。因此, 以下集中讨论三轴分层地球的极移, 即式 (4.6) 与 (4.8)。

4.2 形变及自转本征模

地球自转引起的离心力将导致地球体的旋转形变, 又称为固体极潮 (solid pole tide)。作用于地球的体力 (如日月引潮力) 或面力 (如大气、海洋负荷) 同样会引起地球的非旋转变形。这两种形变都使地球的惯性张量随时间变化。根据 Sasao et al. [1980] 和 Mathews et al. [1991a], 自转形变导致的惯性张量变化与自转参数 m_i 和 m_{fi} ($i=1,2,3$) 成正比。采用 Sasao et al. [1980] 引入的形变 (compliance) 参数 ($\kappa, \xi, \gamma, \beta$), 地球整体及液核的形变可分别表示为 [e.g., Sasao et al., 1980; Mathews et al., 1991a; Chen & Shen, 2010a]

$$\begin{cases} c'_{13} = c_{13}^R + c_{13} = A(\kappa m_1 + \xi m_{f1}) + c_{13} \\ c'_{23} = c_{23}^R + c_{23} = B(\kappa m_2 + \xi m_{f2}) + c_{23} \end{cases} \quad (4.11)$$

和

$$\begin{cases} c'_{f13} = c_{f13}^R + c_{f13} = A_f(\gamma m_1 + \beta m_{f1}) + c_{f13} \\ c'_{f23} = c_{f23}^R + c_{f23} = B_f(\gamma m_2 + \beta m_{f2}) + c_{f23} \end{cases} \quad (4.12)$$

其中, 有无上标 R 分别表示旋转变形效应和非旋转变形效应。将式 (4.11)、(4.12) 代入式 (4.6)、(4.8)

中可得

$$\begin{cases} (1+\kappa)A\Omega\dot{m}_1 + [C - (1+\kappa)B]\Omega^2 m_2 + (A\xi + A_f)\Omega\dot{m}_{f1} - (B\xi + B_f)\Omega^2 m_{f2} \\ = \Omega^2 c_{23} - \Omega\dot{c}_{13} + \Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1 \\ (1+\kappa)B\Omega\dot{m}_2 - [C - (1+\kappa)A]\Omega^2 m_1 + (B\xi + B_f)\Omega\dot{m}_{f2} + (A\xi + A_f)\Omega^2 m_{f1} \\ = -\Omega^2 c_{13} - \Omega\dot{c}_{23} - \Omega h_1 - \dot{h}_2 + L_2 \end{cases} \quad (4.13)$$

和

$$\begin{cases} (1+\gamma)A_f\Omega\dot{m}_1 + (1+\beta)A_f\Omega\dot{m}_{f1} - C_f\Omega^2 m_{f2} = -\Omega\dot{c}_{f13} - \dot{h}_{f1} \\ (1+\gamma)B_f\Omega\dot{m}_2 + (1+\beta)B_f\Omega\dot{m}_{f2} + C_f\Omega^2 m_{f1} = -\Omega\dot{c}_{f23} - \dot{h}_{f2} \end{cases} \quad (4.14)$$

若联立式 (4.13) 和 (4.14)，并令其右端均为零，则可求解地球的自转本征模。注意到三轴地球的自由晃动轨迹为椭圆（而旋转对称地球的相应轨迹为圆）[e.g., Van Hoolst & Dehant, 2002; Chen et al., 2009; Chen & Shen, 2010a]，可将 m_i 和 m_{fi} ($i=1,2$) 表示为如下形式：

$$\begin{cases} m_1 = m_{1c} \cos \sigma t + m_{1s} \sin \sigma t \\ m_2 = m_{2c} \cos \sigma t + m_{2s} \sin \sigma t \\ m_{f1} = m_{f1c} \cos \sigma t + m_{f1s} \sin \sigma t \\ m_{f2} = m_{f2c} \cos \sigma t + m_{f2s} \sin \sigma t \end{cases} \quad (4.15)$$

将式 (4.15) 代入式 (4.13)、(4.14) 可得（右端均已设为零）

$$\begin{cases} (1+\kappa)A\sigma m_{1s} + [C - (1+\kappa)B]\Omega m_{2c} + (\xi A + A_f)\sigma m_{f1s} - (\xi B + B_f)\Omega m_{f2c} = 0 \\ (1+\kappa)A\sigma m_{1c} + [C - (1+\kappa)B]\Omega m_{2s} + (\xi A + A_f)\sigma m_{f1c} - (\xi B + B_f)\Omega m_{f2s} = 0 \\ (1+\kappa)B\sigma m_{2s} - [C - (1+\kappa)A]\Omega m_{1c} + (\xi B + B_f)\sigma m_{f2s} + (\xi A + A_f)\Omega m_{f1c} = 0 \\ (1+\kappa)B\sigma m_{2c} - [C - (1+\kappa)A]\Omega m_{1s} + (\xi B + B_f)\sigma m_{f2c} + (\xi A + A_f)\Omega m_{f1s} = 0 \\ (1+\gamma)A_f\sigma m_{1s} + (1+\beta)A_f\sigma m_{f1s} - C_f\Omega m_{f2c} = 0 \\ (1+\gamma)A_f\sigma m_{1c} + (1+\beta)A_f\sigma m_{f1c} - C_f\Omega m_{f2s} = 0 \\ (1+\gamma)B_f\sigma m_{2s} + (1+\beta)B_f\sigma m_{f2s} + C_f\Omega m_{f1c} = 0 \\ (1+\gamma)B_f\sigma m_{2c} + (1+\beta)B_f\sigma m_{f2c} + C_f\Omega m_{f1s} = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

相应的矩阵形式为

$$\mathbf{MX} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

其中， $\mathbf{X} = [m_{1c} \ m_{1s} \ m_{2c} \ m_{2s} \ m_{f1c} \ m_{f1s} \ m_{f2c} \ m_{f2s}]^T$ 为一个表征地球整体和液核极移的 8×1 矩阵， $\mathbf{0}$ 表示一个 8×1 全零矩阵，而 \mathbf{M} 为一个 8×8 的系数矩阵。令

$$\det(\mathbf{M}) = 0 \quad (4.18)$$

并求解之，可得三轴两层地球模型的自转本征模（分别对应于 Chandler 晃动和自由核章动）[Chen & Shen, 2010a]：

$$\begin{cases} \sigma_C = \Omega \sqrt{\frac{[C - (1+\kappa)A][C - (1+\kappa)B]}{[(1+\kappa)A - (1+\gamma)A_f][(1+\kappa)B - (1+\gamma)B_f]}} \\ \sigma_F = -\Omega \left[\frac{AB}{A_f B_f} \frac{[C_f - (1+\beta)A_f][C_f - (1+\beta)B_f]}{[(1+\kappa)A - (1+\gamma)A_f][(1+\kappa)B - (1+\gamma)B_f]} + 1 \right] \end{cases} \quad (4.19)$$

若假定 $A = B$ 且 $A_f = B_f$ ，则可得相应的旋转对称地球的本征模：

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_C &= \Omega \frac{C - (1 + \kappa)A}{(1 + \kappa)A - (1 + \gamma)A_f} \approx \Omega \frac{(C - A) - \kappa A}{A - A_f} = \Omega \frac{Ae - \kappa A}{A_m} \\ &= \frac{A}{A_m} (e - \kappa) \Omega, \quad e = \frac{C - A}{A}, \quad A_m = A - A_f \\ \sigma_F &= -\Omega \left[\frac{A}{A_f} \frac{C_f - (1 + \beta)A_f}{(1 + \kappa)A - (1 + \gamma)A_f} + 1 \right] \approx -\Omega \left[\frac{A}{A_f} \frac{(C_f - A_f) - \beta A_f}{A - A_f} + 1 \right] \\ &= -\Omega \left[\frac{A}{A_f} \frac{A_f e_f - \beta A_f}{A - A_f} + 1 \right] = -\Omega \left[\frac{A}{A_m} (e_f - \beta) + 1 \right], \quad e_f = \frac{C_f - A_f}{A_f} \end{aligned} \right. \quad (4.20)$$

式 (4.20) 正是 Mathews et al. [1991a, 2002] 得到的表达式。对比式 (4.19) 与 (4.20) 可知，当考虑地球三轴性时（注意赤道扁率远小于极扁率），某些以前可忽略的小量（如地核形变 γA_f 和 γB_f ）均应包括在自转本征模的表达式中。

若假定整个地球为刚体，则液核将不存在且所有形变参数均变为零，式 (4.19) 退化为

$$\sigma_E = \Omega \sqrt{\frac{(C - A)(C - B)}{AB}} \quad (4.21)$$

式 (4.21) 即为三轴刚体地球的自转本征模，该式与 Gross [2007] 的式 (11) 等价。显然当 $A = B$ 时，式 (4.21) 可进一步退化为传统理论中的 Euler 频率 $\sigma_E = \frac{C - A}{A} \Omega$ 。

检验式 (4.19) 的最好方法当然是根据主惯性矩和形变参数值计算出 Chandler 晃动和自由核章动的周期与品质因子，然后与实际观测对比。根据 Chen & Shen [2010a]，形变参数在 Chandler 频段的取值为 $\kappa_{CW} = \kappa(\sigma_{CW}) = (12.4975 - 1.3225i) \times 10^{-4}$ 和 $\gamma_{CW} = \gamma(\sigma_{CW}) = (17.6378 + 1.0654i) \times 10^{-4}$ ，而在自由核章动频段为 $\kappa_{FCN} = \kappa(\sigma_{FCN}) = (10.6282 - 1.2020i) \times 10^{-4}$ 和 $\gamma_{FCN} = \gamma(\sigma_{FCN}) = (19.2072 - 0.9683i) \times 10^{-4}$ 。故由式 (4.19) 可得 $T_C = 433.03$ 平太阳日， $Q_C = 100.20$ ； $T_{FCN} = 430.34$ 平太阳日，这些结果与目前最好的理论结果和观测估计均十分吻合 [Vicente & Wilson, 1997; Mathews et al., 2002; Herring et al., 2002; Ducarme et al., 2007; Rosat & Lambert, 2009]。

4.3 三轴分层地球的 Liouville 方程 — 变量代换法

本节将根据 3.3 节中式 (4.13) 和 (4.14) 进一步推导出适用于三轴分层地球的 Liouville 方程。由上述两式可得

$$\left\{ \begin{aligned} &[(1 + \kappa)A - (1 + \gamma)A_f] \Omega \dot{m}_1 + \Omega^2 [C - (1 + \kappa)B] m_2 \\ &= -(\xi A + \beta A_f) \Omega \dot{m}_{f1} + (\xi B + B_f - C_f) \Omega^2 m_{f2} + \Omega \dot{c}_{f13} + \dot{h}_{f1} \\ &\quad + \Omega^2 c_{23} - \Omega \dot{c}_{13} + \Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1 \\ &[(1 + \kappa)B - (1 + \gamma)B_f] \Omega \dot{m}_2 - \Omega^2 [C - (1 + \kappa)A] m_1 \\ &= -(\xi B + \beta B_f) \Omega \dot{m}_{f2} - (\xi A - A_f - C_f) \Omega^2 m_{f1} + \Omega \dot{c}_{f23} + \dot{h}_{f2} \\ &\quad - \Omega^2 c_{13} - \Omega \dot{c}_{23} - \Omega h_1 - \dot{h}_2 + L_2 \end{aligned} \right. \quad (4.22)$$

根据 Mathews et al. (1991b) 的数值结果，液核相对于地幔的旋转速率 (m_{f1}, m_{f2}) 要比地幔旋转速率 (m_1, m_2) 小两个量级；($\dot{c}_{f13}, \dot{c}_{f23}$) 和 ($\dot{h}_{f1}, \dot{h}_{f2}$) 相对于其它项而言也是小量。若忽略与 (m_{f1}, m_{f2})、($\dot{c}_{f13}, \dot{c}_{f23}$) 和 ($\dot{h}_{f1}, \dot{h}_{f2}$) 有关的项，式 (4.22) 可简化为

$$\left\{ \begin{aligned} &[(1 + \kappa)A - (1 + \gamma)A_f] \Omega \dot{m}_1 + \Omega^2 [C - (1 + \kappa)B] m_2 = \Omega^2 c_{23} - \Omega \dot{c}_{13} + \Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1 \\ &[(1 + \kappa)B - (1 + \gamma)B_f] \Omega \dot{m}_2 - \Omega^2 [C - (1 + \kappa)A] m_1 = -\Omega^2 c_{13} - \Omega \dot{c}_{23} - \Omega h_1 - \dot{h}_2 + L_2 \end{aligned} \right. \quad (4.23)$$

引入辅助参数 (M_1, M_2) 及辅助系数 K :

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{K} m_1 \\ M_2 = K m_2 \end{cases}, \quad K = \left[\frac{[(1+\kappa)B - (1+\gamma)B_f][C - (1+\kappa)B]}{[(1+\kappa)A - (1+\gamma)A_f][C - (1+\kappa)A]} \right]^{1/4} \quad (4.24)$$

式 (4.23) 可改写为

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma_c} \dot{M}_1 + M_2 = K \frac{C-B}{C-(1+\kappa)B} \psi_2 \\ \frac{1}{\sigma_c} \dot{M}_2 - M_1 = -\frac{1}{K} \frac{C-A}{C-(1+\kappa)A} \psi_1 \end{cases} \quad (4.25)$$

其中

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{\Omega^2 c_{13} + \Omega \dot{c}_{23} + \Omega h_1 + \dot{h}_2 - L_2}{\Omega^2 (C-A)} \\ \psi_2 = \frac{\Omega^2 c_{23} - \Omega \dot{c}_{13} + \Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1}{\Omega^2 (C-B)} \end{cases} \quad (4.26)$$

且 Chandler 频率 σ_c 由式 (4.19) 的第一式给出。

若考虑地表负荷引起的负荷形变, 式 (4.25) 右端还需乘以负荷形变因子 $(1+k')$, 其中 $k' = k'(\sigma)$ 为二阶负荷 Love 数。若顾及到季节性尺度上的核幔解耦效应 (即地核与地幔的运动相互不影响), 式 (4.26) 的两个分式需分别乘以解耦因子 $(C-A)/(C_m - A_m)$ 和 $(C-B)/(C_m - B_m)$ 。一般地, 形变效应和核幔解耦/耦合效应可用无量纲的极移转换函数来表示 [e.g., Munk & MacDonald, 1960; Gross, 2007; Jochmann, 2009]。对于三轴分层地球, 可引入如下极移转换函数 [Chen & Shen, 2010a]:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{cases} T_1^{NL} = \frac{1}{K} \frac{C-A}{C_m - A_m} \frac{C-A}{C-(1+\kappa)A} & \text{无负荷 (without loading)} \\ T_1^L = (1+k'_1) T_1^{NL} & \text{有负荷 (with loading)} \end{cases} \\ T_2 &= \begin{cases} T_2^{NL} = K \frac{C-B}{C_m - B_m} \frac{C-B}{C-(1+\kappa)B} & \text{无负荷 (without loading)} \\ T_2^L = (1+k'_2) T_2^{NL} & \text{有负荷 (with loading)} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.27)$$

于是有效激发函数可表示为

$$\begin{cases} \psi_{eff1} = T_1^L \frac{\Omega^2 c_{13} + \Omega \dot{c}_{23}}{\Omega^2 (C-A)} + T_1^{NL} \frac{\Omega h_1 + \dot{h}_2 - L_2}{\Omega^2 (C-A)} \\ \psi_{eff2} = T_2^L \frac{\Omega^2 c_{23} - \Omega \dot{c}_{13}}{\Omega^2 (C-B)} + T_2^{NL} \frac{\Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1}{\Omega^2 (C-B)} \end{cases} \quad (4.28)$$

以有效激发函数 ψ_{eff1} 和 ψ_{eff2} 代替式 (4.25) 右端, 同时采用复数记法

$$\begin{cases} M = M_1 + iM_2 \\ \psi_{eff} = \psi_{eff1} + i\psi_{eff2} \end{cases} \quad (4.29)$$

式 (4.25) 可表示为

$$\frac{i}{\sigma_c} \dot{M} + M = \psi_{eff} \quad (4.30)$$

其解为

$$M = e^{i\sigma_C t} \left[M_0 - i\sigma_C \int_{-\infty}^t \psi_{\text{eff}}(\tau) e^{-i\sigma_C \tau} d\tau \right] \quad (4.31)$$

再由式 (4.24), 可得自转极的极移为

$$\begin{cases} m_1 = KM_1 \\ m_2 = \frac{1}{K}M_2 \end{cases} \quad (4.32)$$

式 (4.31) 的第一项 $M = M_0 e^{i\sigma_C t}$ 即表示 Chandler 晃动, 而由式 (4.32) 可知其晃动轨迹为一椭圆。设该椭圆长短半轴分别为 a 和 b , 则

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{\text{amplitude of } m_1}{\text{amplitude of } m_2} = K^2 \frac{\text{amplitude of } M_1}{\text{amplitude of } M_2} = K^2 \quad (4.33)$$

且 $b - a = (1 - K^2)b \approx 0.0049b$ 。这表明, 三轴性导致的 Chandler 晃动轨迹的椭率为 0.0049, 该结果与 Okamoto & Sasao [1977] 的 0.0046 非常符合 (Okamoto & Sasao 还得出, 若再加上平衡极潮的影响, 则椭率为 0.0151)。两数值间的微小差异主要来源于: 1) 本文采用三轴两层地球模型, 而 Okamoto & Sasao 仅采用单层地球模型 (即没有考虑液核); 2) 采用的 A, B, C 等参数的数值略有不同, 本文采用的更为精确。

根据国际天文协会 2000 年大会 (IAU General Assembly 2000) 决议, 地球自转观测实际上提供的是天球中间极 (Celestial Intermediate Pole, CIP) 而不是自转极的运动 [Petit & Luzum, 2010]。CIP 运动 ($p = x - iy$) 与自转极运动 ($m = m_1 + im_2$) 之间存在如下关系 [e.g., Gross, 1992; Brzeziński, 1992; Brzeziński & Capitaine, 1993; also see Gross, 2007]:

$$m = p - \frac{i}{\Omega} \dot{p} \quad (4.34)$$

若采用下标 p 和 w 分别表示物质项 (与 Ωc_{13} 、 Ωc_{23} 有关) 和运动项 (与 h_1 、 h_2 有关), 可引入类似于 Barnes et al. [1983] 定义的角动量函数 [e.g., Chen & Shen, 2010a]

$$\begin{cases} \chi_1 = \frac{\Omega c_{13} + h_1}{\Omega(C - A)} \equiv \chi_{p1} + \chi_{w1} \\ \chi_2 = \frac{\Omega c_{23} + h_2}{\Omega(C - B)} \equiv \chi_{p2} + \chi_{w2} \end{cases} \quad (4.35)$$

利用式 (4.34)、(4.35) 和 (4.32), 由式 (4.30) 可得出对应于天球中间极的 Liouville 方程 (推导过程类似于 Gross [1992], Brzeziński [1992]):

$$\begin{cases} \frac{i}{\sigma_C} \dot{x} - y = \chi_{\text{eff}2} \\ \frac{i}{\sigma_C} \dot{y} + x = -\chi_{\text{eff}1} \end{cases} \quad \text{or} \quad \frac{i}{\sigma_C} \dot{p} + p = \chi_{\text{eff}} = \chi_{\text{eff}1} + i\chi_{\text{eff}2} \quad (4.36)$$

其中有效角动量函数定义为

$$\begin{cases} \chi_{\text{eff}1} = X_1^{NL} \chi_{w1} + X_1^L \chi_{p1} = X_1^{NL} \frac{c_{13}}{C - A} + X_1^L \frac{h_1}{\Omega(C - A)} \\ \chi_{\text{eff}2} = X_2^{NL} \chi_{w2} + X_2^L \chi_{p2} = X_2^{NL} \frac{c_{23}}{C - B} + X_2^L \frac{h_2}{\Omega(C - B)} \end{cases} \quad (4.37)$$

若假设 $A = B$ 且 $A_f = B_f$, 式 (4.27) 与 (4.37) 便分别退化为

$$T^{L/NL} = (1 + k')^\delta \frac{C - A}{C_m - A_m} \frac{C - A}{C - (1 + \kappa)A} = (1 + k')^\delta \frac{C - A}{C_m - A_m} \frac{e}{e - \kappa} \quad (4.38)$$

和

$$\chi_{eff} = T^L \frac{c}{C-A} + T^{NL} \frac{h}{\Omega(C-A)} \quad (4.39)$$

它们即为对应于旋转对称地球模型的极移转换函数和有效激发函数。式 (4.38) 中， $\delta=0$ 或 1，分别对应于无负荷形变和有负荷形变两种情况。

为便于对比三轴地球自转理论与传统理论，表 4.1 集中列出了相关理论公式。不仅本征模不同，两种理论的转换函数乃至有效激发函数也均存在差异：三轴性使得转换函数的 x、y 分量互不相等，从而有效激发函数的表达式不具有传统理论的对称性。若转换函数不随频率变化（转换函数的频率依赖性可参见第五章或 Chen & Shen [2010a,b; 2011]），则三轴性将导致一个相对于传统理论的极移改正量，该改正量大致上与激发源成比例关系。具体的数值比较可参见 4.4 节。

表 4.1 三轴及旋转对称地球的自转理论比较

Table 4.1 Rotation theories for the triaxial and symmetric Earth models

	对应于三轴地球模型的自转理论	对应于旋转对称地球模型的自转理论
基本方程	$\frac{i}{\sigma_C} \dot{p} + p = \chi_{eff} = \chi_{eff1} + i\chi_{eff2}$	$\frac{i}{\sigma_C} \dot{p} + p = \chi_{eff}$
转换函数	$\begin{cases} T_1^{L/NL} = \frac{1}{K} (1+k')^\delta \frac{C-A}{C_m - A_m} \frac{C-A}{C-(1+\kappa)A} \\ T_2^{L/NL} = K (1+k')^\delta \frac{C-B}{C_m - B_m} \frac{C-B}{C-(1+\kappa)B} \end{cases}$ $K = \left[\frac{[(1+\kappa)B - (1+\gamma)B_f][C - (1+\kappa)B]}{[(1+\kappa)A - (1+\gamma)A_f][C - (1+\kappa)A]} \right]^{1/4}$	$T^{L/NL} = (1+k')^\delta \frac{C-A}{C_m - A_m} \frac{e}{e-\kappa}$
有效激发	$\begin{cases} \chi_{eff1} = T_1^{NL} \frac{c_{13}}{C-A} + T_1^L \frac{h_1}{\Omega(C-A)} \\ \chi_{eff2} = T_2^{NL} \frac{c_{23}}{C-B} + T_2^L \frac{h_2}{\Omega(C-B)} \end{cases}$	$\chi_{eff} = T^L \frac{c}{C-A} + T^{NL} \frac{h}{\Omega(C-A)}$
Chandler 频率	$\sigma_{CW} = \Omega \sqrt{\frac{[C - (1+\kappa_{CW})A][C - (1+\kappa_{CW})B]}{[(1+\kappa_{CW})A - (1+\gamma_{CW})A_f][(1+\kappa_{CW})B - (1+\gamma_{CW})B_f]}}$	$\sigma_{CW} = \frac{A}{A_m} (e - \kappa_{CW}) \Omega$
自由核章动频率	$\sigma_{FCN} = -\Omega \left[\sqrt{\frac{AB [C_f - (1+\beta_{FCN} - K_{CMB})A_f][C_f - (1+\beta_{FCN} - K_{CMB})B_f]}{A_f B_f [(1+\kappa_{FCN})A - (1+\gamma_{FCN})A_f][(1+\kappa_{FCN})B - (1+\gamma_{FCN})B_f]}} + 1 \right]$	$\sigma_{FCN} = -\Omega \left[\frac{A}{A_m} (e_f - \beta_{FCN}) + 1 \right]$

4.4 三轴性对极移激发的贡献：以大气、海洋激发为例

由于大气和海洋（尤其是大气）的质量迁移和运动是极移的主要激发源，本节将以大气、海洋激发为例讨论三轴性对极移激发的贡献。

大气（海洋）激发一般可划分为两部分：由风（洋流）引起的运动项及大气（海洋）质量迁移导致的物质项。其中大气（海洋）的质量迁移表现为地表（洋底）压强变化。本文采用美国环境预测中心和大气研究中心 NCEP/NCAR (National Centers for Environmental Prediction / National Center for Atmospheric Research) 发布的大气角动量 (AAM) 再分析数据 [Salstein & Rosen, 1997; Zhou et al., 2006]，以及美国喷气动力实验室 JPL (Jet Propulsion Laboratory) 发布的基于 ECCO (Estimating the

Circulation and Climate of the Ocean) 模型的海洋角动量 (OAM) 数据 [Gross et al., 2003; Gross, 2009]。其中, OAM 数据采用的文件版本为 ECCO_kf080.oam; 计算该 OAM 数据的 ECCO 模型基于麻省理工大学综合循环模型 MIT-GCM (Massachusetts Institute of Technology – General Circulation Model), 并融合了海面高观测数据同时去除了长周期海潮的干扰 [Gross, 2009]; 该循环模型由 NCEP/NCAR 发布的地表风压 (并非大气压强)、热流、淡水流驱动, 故与 NCEP/NCAR 的 AAM 数据是相容的。大气和海洋角动量的 x、y 分量分别如图 4.1 和 4.2 所示。

在 JPL 运行的 ECCO 模型没有采用地表气压来驱动, 故使用 ECCO 模型时通常采用反变气压计假设 (inverted barometer, IB) 来考虑海洋区域的气压作用 [Gross, 2010]。通常认为, IB 模型适用于描述海洋对地表气压变化的长期响应 (如 10 天以上), 但不适用于短期响应 (如 1–2 天), 临界点可能在几天到 10 天之间 [e.g., Wunsch & Stammer, 1997; Gross, 2010]。因此这里采用 IB 假设来考虑大气和海洋对极移的联合激发作用, AAM 和 OAM 数据均从 1993 年 1 月 1 日到 2009 年 8 月 31 日, 且转化为日采样 (采样时刻为 UTC12.0000)。

基于表 4.1 可得到由两种理论确定的大气–海洋激发之差。该差异在 x 轴和 y 轴的分量分别约为 0.1 mas (milli-arcsecond) 和 0.2 mas (参见图 4.3), 远小于目前大气海洋激发的确定精度 (约 10 mas 或更大, 参见第六章或 Chen & Shen [2011b])。考虑到大气海洋激发要若干年后才能达到 0.1 mas 精度, 因此三轴性对极移激发的影响在目前乃至将来一段时间内可予以忽略。

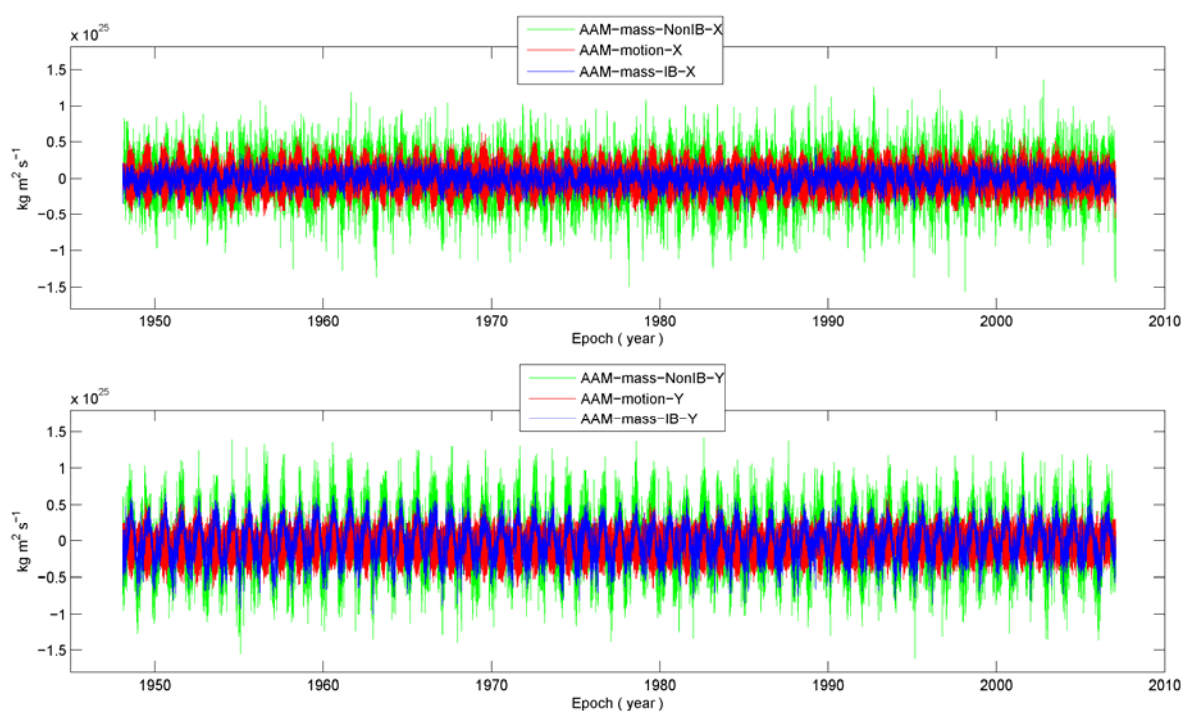


图 4.1 基于 NCEP/NCAR 再分析数据的大气角动量的 x 和 y 分量
 Fig 4.1 The x- and y-components of the NCEP/NCAR reanalyzed AAM

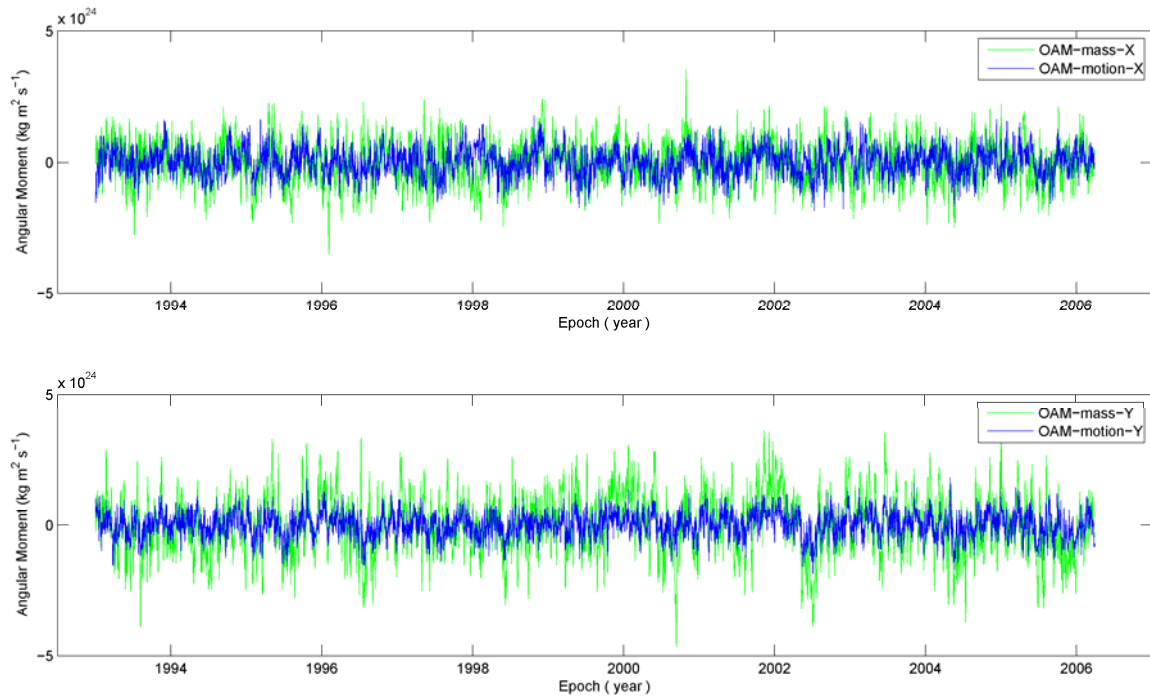


图 4.2 基于 ECCO 模型的海洋角动量的 x 和 y 分量
 Fig 4.2 The x- and y-components of the ECCO OAM

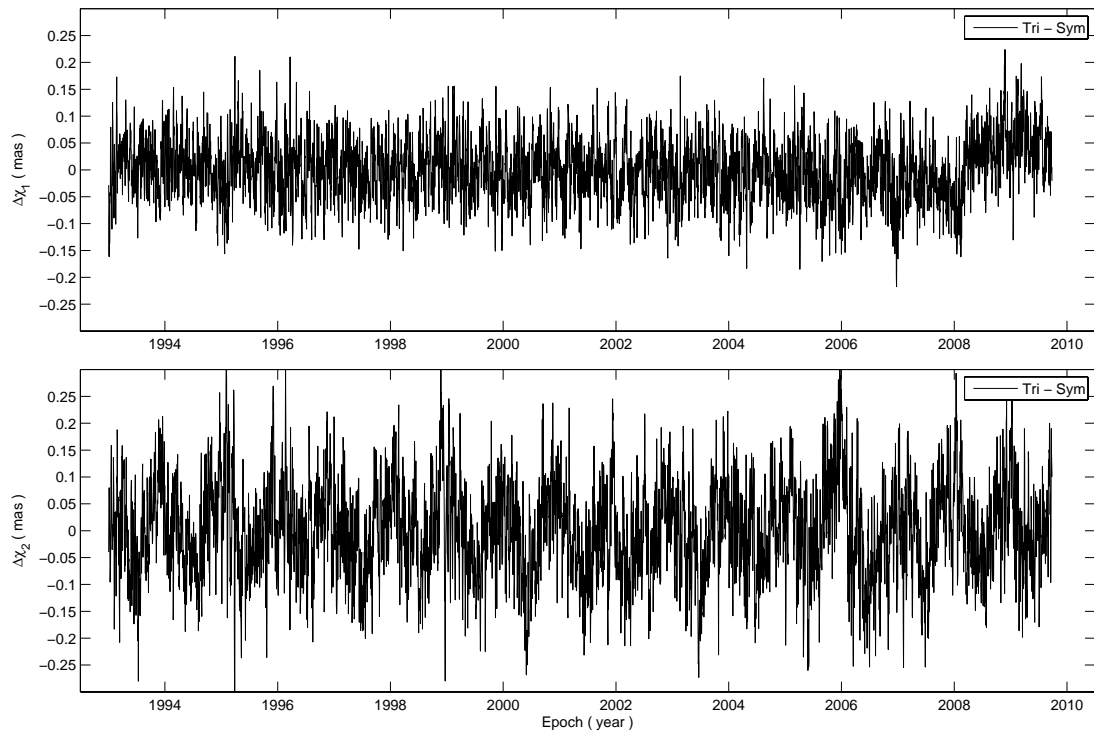


图 4.3 两种理论确定的大气-海洋激发的差异 (Tri 和 Sym 分别表示三轴和传统自转理论；
 引自 Chen & Shen [2011])

Fig 4.3 Differences between the atmospheric-oceanic excitations for the triaxial and symmetric Earth (denoted by Tri and Sym, respectively; from Chen & Shen [2011])

4.5 三轴分层地球的 Liouville 方程 — 求导消元法

4.5.1 二阶微分动力学方程及其解

在 4.3 节中，本文导出了式 (4.23)，进而采用换元法将其转化为传统形式。该方法的优点是充分利用了较为成熟的传统理论结果，不过，换元造成了更多的小量取舍误差，这些误差尽管预期很小，但难以定量估计。为避免此种缺陷，本节将采用一种“求导消元法”来处理三轴自转理论，其代价是动力学方程变为二阶微分方程（传统理论和 4.3 节理论为一阶微分方程），解的形式也变得非常复杂。

为方便起见，设

$$\begin{cases} M_A = (1+\kappa)A - (1+\gamma)A_f, & N_A = C - (1+\kappa)A \\ M_B = (1+\kappa)B - (1+\gamma)B_f, & N_B = C - (1+\kappa)B \\ \Omega P_1 = \Omega^2 c_{23} - \Omega \dot{c}_{13} + \Omega h_2 - \dot{h}_1 + L_1 \\ \Omega P_2 = -\Omega^2 c_{13} - \Omega \dot{c}_{23} - \Omega h_1 - \dot{h}_2 + L_2 \end{cases} \quad (4.40)$$

于是式 (4.23) 可写为

$$\begin{cases} M_A \dot{m}_1 + N_B \Omega m_2 = P_1 \\ M_B \dot{m}_2 - N_A \Omega m_1 = P_2 \end{cases} \quad (4.41)$$

对时间 t 再次微分式 (4.41)，可得

$$\begin{cases} M_A \ddot{m}_1 + N_B \Omega \dot{m}_2 = \dot{P}_1 \\ M_B \ddot{m}_2 - N_A \Omega \dot{m}_1 = \dot{P}_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

联立式 (4.41) 和 (4.42) 消去 \dot{m}_1 和 \dot{m}_2 ，有

$$\begin{cases} M_A M_B \ddot{m}_1 + N_A N_B \Omega^2 m_1 = M_B \dot{P}_1 - N_A \Omega P_2 \\ M_A M_B \ddot{m}_2 + N_A N_B \Omega^2 m_2 = M_A \dot{P}_2 + N_B \Omega P_1 \end{cases} \quad (4.43)$$

式 (4.43) 描述了一个具有本征频率

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{N_A N_B}{M_A M_B}} \Omega = \sqrt{\frac{[C - (1+\kappa)A][C - (1+\kappa)B]}{[(1+\kappa)A - (1+\gamma)A_f][(1+\kappa)B - (1+\gamma)B_f]}} \Omega \quad (4.44)$$

的系统的振动。注意式 (4.44) 与 4.2 节求解特征值法的结果（参见式 (4.19) 中第一式）是一致的，这从另一方面证实了本文理论的正确性。

若采用复数记法，即 $m = m_1 + im_2$ 和 $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ ，其中

$$\begin{cases} \Psi_1 = \frac{1}{N_B \Omega} \left(\frac{M_B}{N_A \Omega} \dot{P}_1 - P_2 \right) \\ \Psi_2 = \frac{1}{N_A \Omega} \left(\frac{M_A}{N_B \Omega} \dot{P}_2 + P_1 \right) \end{cases} \quad (4.45)$$

式 (4.43) 可简写为

$$\sigma_C^{-2} \ddot{m} + m = \Psi(t) \quad (4.46)$$

式 (4.46) 的通解可表述为

$$m = C_1 e^{i\theta_1} e^{i\sigma_c t} + C_2 e^{i\theta_2} e^{-i\sigma_c t} + \frac{i\sigma_c}{2} \left[e^{i\sigma_c t} \int_0^t \Psi(\tau) e^{-i\sigma_c \tau} d\tau - e^{-i\sigma_c t} \int_0^t \Psi(\tau) e^{i\sigma_c \tau} d\tau \right] \quad (4.47)$$

其中 C_1 和 C_2 为积分常数。显然，式 (4.47) 的前两项描述了一个具有椭圆轨迹的自由运动 — Chandler 晃动。

为简便起见，定义

$$\begin{cases} X_1 = \Omega c_{13} + h_1 \\ X_2 = \Omega c_{23} + h_2 \end{cases}, \begin{cases} P_1 = -\dot{X}_1/\Omega + X_2 \\ P_2 = -\dot{X}_2/\Omega - X_1 \end{cases} \quad (4.48)$$

于是式 (4.45) 可写为 (忽略外部天体的引力矩，并考虑核幔解耦和负荷效应)

$$\begin{cases} \Psi_1 = \frac{C-B}{C_m - B_m} \frac{(1+k')^\delta}{[C - (1+\kappa)B]\Omega} [K_1(-\ddot{X}_1/\Omega^2 + \dot{X}_2/\Omega) - (-\dot{X}_2/\Omega - X_1)] \\ \Psi_2 = \frac{C-A}{C_m - A_m} \frac{(1+k')^\delta}{[C - (1+\kappa)A]\Omega} [K_2(-\ddot{X}_2/\Omega^2 - \dot{X}_1/\Omega) + (-\dot{X}_1/\Omega + X_2)] \end{cases} \quad (4.49)$$

其中

$$\begin{cases} K_1 = \frac{M_B}{N_A} = \frac{(1+\kappa)B - (1+\gamma)B_f}{C - (1+\kappa)A} \approx 402 \\ K_2 = \frac{M_A}{N_B} = \frac{(1+\kappa)A - (1+\gamma)A_f}{C - (1+\kappa)B} \approx 406 \end{cases} \quad (4.50)$$

且

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{with loading} \\ 0 & \text{without loading} \end{cases} \quad (4.51)$$

式 (4.44) — (4.51) 即构成一套完整的三轴两层地球自转理论。

现将此处理论与传统理论做一比较。传统的 Liouville 方程可表述为 [e.g., Lambeck, 1980]

$$\frac{i}{\sigma_c} \dot{m} + m = \psi \quad (4.52)$$

其中

$$\psi = T \frac{\Omega^2 c - i\Omega \dot{c} + \Omega h - i\dot{h} + iL}{\Omega^2 (C - A)} \quad (4.53)$$

为传统激发函数， T 为转换函数。式 (4.52) 和 (4.53) 采用了如下复数记法

$$\begin{cases} m = m_1 + im_2 \\ c = c_{13} + ic_{23} \\ h = h_1 + ih_2 \\ L = L_1 + iL_2 \\ \psi = \psi_1 + i\psi_2 \end{cases} \quad (4.54)$$

式 (4.52) 的通解为

$$m = e^{i\sigma_c t} \left[m_0 - i\sigma_c \int_{-\infty}^t \psi_{\text{eff}}(\tau) e^{-i\sigma_c \tau} d\tau \right] \quad (4.55)$$

此节理论与传统理论的主要差别表现在如下四个方面：

1. 传统理论的主要方程 $i\sigma_c^{-1} \dot{m} + m = \psi$ (参见式 (4.52)) 为一阶微分方程，而本节理论给出的则为二阶微分方程 $\sigma_c^{-2} \ddot{m} + m = \Psi$ (参见式 (4.46))；
2. 两种理论的本征频率 (即 Chandler 频率) 的表达式不同，但若假定 $A = B$ 且 $A_f = B_f$ ，两者完全

相同 (证明参见 4.2 节式 (4.20));

3. 激发函数的定义不同 (注意本节理论采用了大写 Ψ): Ψ 既包含一阶微分项又包含二阶微分项, 而 ψ 仅包含一阶微分项;
4. 解的形式不同 (参见式 (4.47) 和 (4.55)): 本节理论表明 Chandler 晃动和周年晃动轨迹均为椭圆 (与极移观测结果相符), 而传统理论认为 Chandler 晃动轨迹为圆。

综合以上四点, 可知本节理论对极移的描述更为精确, 但要比传统理论复杂得多。下一小节将会给出本节理论在周年激发中的应用。

4.5.2 在长周期情况下的简化及在周年激发中的应用

若外部扰动的周期较长 (远大于 1 天), 式 (4.49) 可适当简化。

暂转到频域以方便说明。以周年激发为例, $\dot{X}_i \rightarrow \sigma X_i \approx \frac{\Omega}{365} X_i$, $\ddot{X}_i \rightarrow \sigma^2 X_i \approx \frac{\Omega^2}{365^2} X_i$, $K_i \approx \frac{400}{\Omega}$ ($i=1,2$), 易得

$$\Psi_1 \rightarrow \frac{C-B}{C_m - B_m} \frac{(1+k')^\delta}{[C-(1+\kappa)B]\Omega} \left[-\frac{400}{\Omega} \frac{\Omega^2}{365^2} X_1 + \frac{400}{\Omega} \frac{\Omega}{365} X_2 + \frac{\Omega}{365} X_2 + \Omega X_1 \right]$$

上式方括号内第一和第三项显然可作为小量并予以忽略 (Ψ_2 类似)。因此, 若仅考虑长期激发, 式 (4.49) 可简化为

$$\begin{cases} \Psi_1 = \frac{C-B}{C_m - B_m} \frac{(1+k')^\delta}{[C-(1+\kappa)B]\Omega} (X_1 + \frac{K_1}{\Omega} \dot{X}_2) \\ \Psi_2 = \frac{C-A}{C_m - A_m} \frac{(1+k')^\delta}{[C-(1+\kappa)A]\Omega} (X_2 - \frac{K_2}{\Omega} \dot{X}_1) \end{cases} \quad (4.56)$$

注意到式 (4.48), 式 (4.56) 可更明确地表述为

$$\begin{cases} \Psi_1 = \frac{C-B}{C_m - B_m} \left\{ (1+k') \frac{\Omega c_{13} + K_1 \dot{c}_{23}}{[C-(1+\kappa)B]\Omega} + \frac{h_1 + K_1 \dot{h}_2 / \Omega}{[C-(1+\kappa)B]\Omega} \right\} \\ \Psi_2 = \frac{C-A}{C_m - A_m} \left\{ (1+k') \frac{\Omega c_{23} - K_2 \dot{c}_{13}}{[C-(1+\kappa)A]\Omega} + \frac{h_2 + K_2 \dot{h}_1 / \Omega}{[C-(1+\kappa)A]\Omega} \right\} \end{cases} \quad (4.57)$$

现假定式 (4.57) 描述的外部激发可表示为一系列简谐扰动之和, 即

$$\Psi = \sum_{\sigma} (A_1 e^{i\alpha_1} e^{i\sigma t} + A_2 e^{i\alpha_2} e^{-i\sigma t}) \quad (4.58)$$

对某一特定频率 σ 的激发 $\Psi = A_1 e^{i\alpha_1} e^{i\sigma t} + A_2 e^{i\alpha_2} e^{-i\sigma t}$, 可由式 (4.47) 得到如下解

$$\begin{aligned} m &= C_1 e^{i\beta_1} e^{i\sigma_c t} + C_2 e^{i\beta_2} e^{-i\sigma_c t} && \text{Chandler 晃动} \\ &-(f_- A_1 e^{i\alpha_1} - f_+ A_2 e^{i\alpha_2}) e^{i\sigma_c t} + (f_+ A_1 e^{i\alpha_1} - f_- A_2 e^{i\alpha_2}) e^{-i\sigma_c t} && \text{绕激发极的运动} \\ &+(f_- + f_+) (A_1 e^{i\alpha_1} e^{i\sigma t} + A_2 e^{i\alpha_2} e^{-i\sigma t}) && \text{受迫晃动} \end{aligned} \quad (4.59)$$

其中

$$\begin{cases} f_- = \frac{1}{2} \frac{\sigma_c}{\sigma - \sigma_c} \\ f_+ = \frac{1}{2} \frac{\sigma_c}{\sigma + \sigma_c} \end{cases} \quad (4.60)$$

根据式 (4.59) 第三行, 可知周年激发 $\Psi_A = A_1 e^{i\alpha_1} e^{i\sigma_1 t} + A_2 e^{i\alpha_2} e^{-i\sigma_1 t}$ 导致的周年晃动为

$$\begin{aligned} m_{AW} &= A_A^+ e^{i\alpha_1} e^{i\sigma_1 t} + A_A^- e^{i\alpha_2} e^{-i\sigma_1 t} \\ A_A^+ &= (f_- + f_+) A_1 \\ A_A^- &= (f_- + f_+) A_2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

此处仍采用 NCEP/NCAR 大气角动量 (AAM) 再分析数据和 ECCO 海洋角动量 (OAM) 数据来定量估计大气和海洋对周年晃动的贡献。由于式 (4.57) 仅适用于长周期激发, 因此在应用该式前需先滤去大气、海洋角动量的高频成分。本文采用截止频率为 8 cpy 的低通 Butterworth 滤波器处理大气、海洋角动量数据, 并将处理后的数据应用于式 (4.57), 所得的大气海洋激发如图 4.4 灰色线所示, 而黑色线则是其周年项 (由最小二乘拟合得到)。

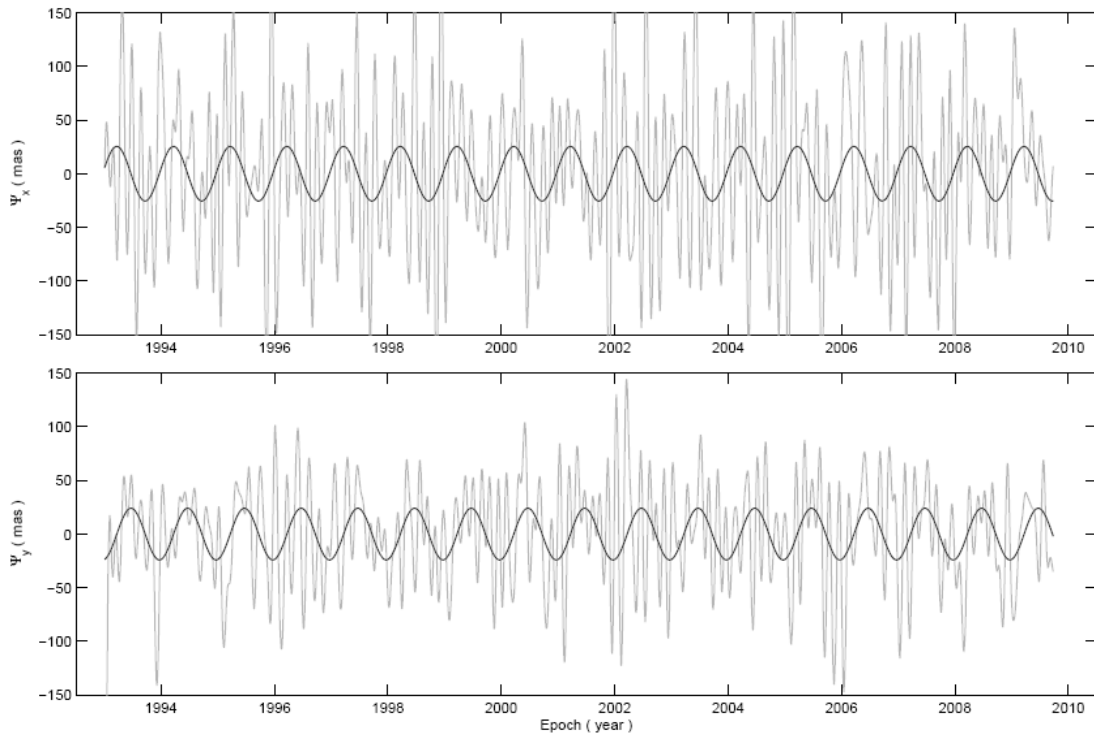


图 4.4 根据式 (4.57) 计算的大气-海洋激发 (灰色线) 及其周年成分 (黑色线)

Fig.4.4 Atmospheric-oceanic excitation (grey line) and its annual component (black line) computed according to eq.(4.57)

表 4.2 大气-海洋激发的周年晃动

Table 4.2 Annual components of the atmospheric and oceanic excitations

	顺向分量		逆向分量	
	振幅 (mas)	相位 (deg)	振幅 (mas)	相位 (deg)
本节理论	70.3091	134.5150	1.9781	-164.2713
传统理论	61.6512	-77.7245	5.5208	-117.0284
观测值	89.9219	115.8132	4.5163	-124.5048

根据式 (4.61) 和图 4.4 黑色线所示的周年激发, 易得大气、海洋对周年晃动的贡献 (参见表 4.2)。为便于比较, 表 4.2 同时列出了观测值和基于传统理论的估计值。可以看出, 本节理论结果

与观测值在顺向分量上更为接近，且改进十分明显；在逆向分量上则略差。注意到顺向分量为周年晃动主项，而逆向分量本身很小，故可认为本节理论优于传统理论。

4.6 三轴地球 Chandler 晃动的频率振幅调制理论 — 椭圆函数求解法

本节主要讨论地球三轴性导致的 Chandler 晃动的频率 σ_C 与振幅 θ_C 的变化和相互影响。在 Munk & MacDonald [1960] 所开创的传统微扰法自转理论中，Chandler 晃动频率 σ_C (或周期 T_C) 是恒定不变的，因此不能反映 σ_C 与 θ_C 相互作用的特性。

自 Chandler 晃动被发现以来，学者们就 σ_C/T_C 是否随时间变化这一问题展开了激烈争论，至今尚无定论。Chandler [1891] 根据纬度变化数据发现 Chandler 晃动时，就指出 T_C 可能随时间变化。Iijima [1965] 采用 ILS (国际纬度服务) 从 1900 到 1963 的采样间隔为 0.1 年的数据，发现 T_C 在 1.1 到 1.2 年之间波动，并且 T_C 增大时 Chandler 晃动振幅 θ_C 也增大，反之亦然。Carter [1981, 1982] 由极移数据得出 Chandler 晃动中存在频率调制机制，揭示了 T_C 与 θ_C 相互依赖的关系。高布锡 [1997] 由极移数据得出 T_C 存在振幅约为 10 天的波动， θ_C 也同步变化。Höpfner [2003] 指出 Chandler 晃动的周期在 422 到 438 天之间变化，而其振幅则在 0.15 到 0.20 mas 间波动。Liu et al. [2007] 利用正则 Morlet 小波变换分析了 IERS 发布的 1950—2000 年的极移数据，其结果表明，在任一瞬时，Chandler 晃动仅存在一个周期 (即 Chandler 晃动并非两个晃动的合成)，但周期仍是可变的：其平均周期为 433.08 天，相对该平均值变化的标准偏差为 1.57 天。然而，也有不少学者 [e.g., Newcomb, 1892; Okubo, 1982; Kuehne & Wilson, 1996; Vicente & Wilson, 1997; Seitz et al., 2005] 认为 T_C 并不随时间变化。这些研究都认为 Chandler 周期是单值的，只是在周期值恒定还是可变之间存在争议。

另一派观点则认为 Chandler 晃动是两个或多个频率相近的晃动的合成，即 Chandler 周期不是单值的 [e.g., Chao, 1983; Gaposchkin, 1972; Guo et al., 2005]。他们主要采用两个或多个频率的简谐运动来模拟极移数据，即利用极移观测来确定这些简谐运动的参数。尽管其结果可与极移观测相当吻合 (这毫不奇怪，因为结果本身就是拟合到观测值的)，但不一定反映了 Chandler 晃动的本质属性。

持以上观点者论战了一个多世纪，但都不能说服对方。究其原因，乃是上述研究基本上仅是对不同版本数据进行数值分析的结果，缺乏有力的理论支持。本节将基于更接近真实的三轴性地球模型研究 T_C 与 θ_C 之间的理论关系，建立两者的相关性机制。

4.6.1 三轴刚体地球情形下 Euler 动力学方程的解

假定地球为一主惯性矩为 A 、 B 和 C 的三轴刚体，并选取主惯性轴坐标系 $o-x_i y_i z_i$ 作为参考系 (x_i 、 y_i 、 z_i 轴分别与主惯性轴 A 、 B 、 C 重合)，则描述地球自转的 Euler 动力学方程可写为 [Lambeck, 1980; Shen et al., 2007]

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 = L_1 \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 = L_2 \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 = L_3 \end{cases} \quad (4.62)$$

令 $\alpha = (C - B)/A$ 、 $\beta = (C - A)/B$ 、 $\gamma = (B - A)/C$ (注意此处它们不是形变参数)，当力矩 $L_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) 时，式 (4.62) 可改写为

$$\dot{\omega}_1 + \alpha\omega_2\omega_3 = 0 \quad (4.63)$$

$$\dot{\omega}_2 - \beta\omega_3\omega_1 = 0 \quad (4.64)$$

$$\dot{\omega}_3 + \gamma\omega_1\omega_2 = 0 \quad (4.65)$$

将式 (4.63)、(4.64) 和 (4.65) 两两相除并积分, 可得

$$\beta\omega_1^2 + \alpha\omega_2^2 = C_{12} \quad (4.66)$$

$$\gamma\omega_2^2 + \beta\omega_3^2 = C_{23} \quad (4.67)$$

$$\alpha\omega_3^2 - \gamma\omega_1^2 = C_{31} \quad (4.68)$$

其中 C_{ij} ($i, j=1,2,3$) 是待定常数。式 (4.66) 表明: 自由晃动的轨迹为一椭圆 (不妨设 a 、 b 分别为椭圆的短、长半轴), 且满足 $a/b = \sqrt{\alpha/\beta} \approx 0.996663$ 。若令 $\tilde{m} = m_1 + im_2 = (\omega_1 + i\omega_2)/\Omega$ (其中 $i = \sqrt{-1}$), 则 $m_1^2/a^2 + m_2^2/b^2 = 1$, 而 $m_0 = \sqrt{ab} \approx 160$ mas (毫角秒) 为 Chandler 晃动的平均振幅, 而短、长半轴分别为 $a = (\alpha/\beta)^{1/4} m_0$ 和 $b = (\beta/\alpha)^{1/4} m_0$ 。设 $\theta_c \equiv |\tilde{m}|$, 显然有 $a \leq |\tilde{m}| \leq b$ ($|\tilde{m}|$ 即为自由晃动的振幅)。

不失一般性, 假设在初始时刻, ω 位于 $o-xz$ 平面内, 且 $\omega_3(0) = \Omega$, 于是 $|\tilde{m}(0)| = a = (\alpha/\beta)^{1/4} m_0$, $\omega_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = a\omega_3(0)$ 。基于式 (4.66) — (4.68), 可得

$$\begin{cases} C_{12} = \beta\omega_1^2(0) = \beta\Omega^2 a^2 \\ C_{23} = \beta\omega_3^2(0) = \beta\Omega^2 \\ C_{31} = \alpha\omega_3^2(0) - \gamma\omega_1^2(0) = \alpha\Omega^2 - \gamma\Omega^2 a^2 \end{cases} \quad (4.69)$$

于是积分常数得以确定。

根据式 (4.66) 和 (4.67), ω_1 和 ω_3 可表示为 ω_2 的函数, 将这些函数代入式 (4.64) 中可得

$$\frac{d\omega_2}{dt} - \sqrt{(C_{23} - \gamma\omega_2^2)(C_{12} - \alpha\omega_2^2)} = 0 \quad (4.70)$$

上式可转化为如下积分方程

$$\int_{\omega_2(0)}^{\omega_2(t)} \frac{d\omega_2}{\sqrt{(C_{23} - \gamma\omega_2^2)(C_{12} - \alpha\omega_2^2)}} = t \quad (4.71)$$

令

$$m = \frac{\gamma C_{12}}{\alpha C_{23}} \in (0, 1), \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha}{C_{12}}} \omega_2 \quad (4.72)$$

式 (4.71) 可化为

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha C_{23}}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}} = t, \quad 0 < m < 1. \quad (4.73)$$

其中 $\varphi(0) = 0$, 因为之前选取了 $\omega_2(0) = 0$ 。

实际上, 式 (4.73) 可表示为如下的第一类不完全椭圆积分 [Abramowitz & Stegun, 1965]

$$F = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}} = t \sqrt{\alpha C_{23}} \quad (4.74)$$

给定 m 和 F , 可得式 (4.74) 的椭圆函数解 $\text{sn}(t\sqrt{\alpha C_{23}})$ 和 $\text{cn}(t\sqrt{\alpha C_{23}})$, 它们均具有周期 $4K(m)$, 其中

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}} \quad (4.75)$$

为第一类完全椭圆积分 [Abramowitz & Stegun, 1965]。根据周期函数性质, 可知 $\text{sn}(t)$ 和 $\text{cn}(t)$ 具有相同周期 $4K(m)/\sqrt{\alpha C_{23}}$, 并且满足 $\text{sn}(t) = \sin \varphi$ 和 $\text{cn}(t) = \cos \varphi$ (以及 $\text{dn}(t) = \sqrt{1 - m \text{sn}^2(t)}$)。由式 (4.72) 可得

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C_{12}}{\alpha}} \sin \varphi = \sqrt{\frac{C_{12}}{\alpha}} \text{sn}(t) = \Omega b \text{sn}(t) \quad (4.76)$$

则 ω_2 显然也以 $4K(m)/\sqrt{\alpha C_{23}}$ 为周期 (实际上就是 Euler 周期)。由式 (4.69)、(4.72) 和 (4.75) 可知, 三轴刚体地球的 Euler 周期可表示为 [Chen et al., 2009]

$$T_E = \frac{4K(m)}{\Omega\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{4}{\Omega\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}}, \quad m = \frac{\gamma}{\alpha} a^2 = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}} m_0^2 \quad (4.77)$$

将式 (4.76) 分别代入式 (4.66) 和 (4.67) 中, 有

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C_{12}}{\beta}} \cos \varphi = \sqrt{\frac{C_{12}}{\beta}} \text{cn}(t) = \Omega a \text{cn}(t) \quad (4.78)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{C_{23} - \gamma\omega_2^2}{\beta}} = \Omega\sqrt{1 - m \text{sn}^2(t)} = \Omega \text{dn}(t) \quad (4.79)$$

其中, $\text{dn}(t)$ 周期为 $\text{sn}(t)$ 或 $\text{cn}(t)$ 周期的一半, 即 $2K(m)/\sqrt{\alpha C_{23}} = T_E/2$ [Abramowitz & Stegun, 1965]。式 (4.76) — (4.79) 就是描述三轴刚体地球自由转动的一组完备解。

4.6.2 新解的意义及与其它理论的比较

上一小节推导了三轴刚体地球的自转理论, 该理论可概述如下 [Chen et al., 2009]:

首先, 地球的角速度在主惯性轴坐标系下可表述为

$$\begin{cases} \omega_1 = \Omega a \text{cn}(u) \\ \omega_2 = \Omega b \text{sn}(u) \\ \omega_3 = \Omega \text{dn}(u) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} m_1 = a \text{cn}(u) \\ m_2 = b \text{sn}(u) \\ m_3 = \text{dn}(u) - 1 \end{cases} \quad (4.80)$$

其中, $a/b = \sqrt{\alpha/\beta}$, $\omega_3 = \Omega(1 + m_3)$, cn 、 sn 和 dn 称为 Jacobi 椭圆函数, 且

$$u = \frac{1}{\Omega\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}} \quad (4.81)$$

第二, ω_1 和 ω_2 具有相同周期, 即 Euler 周期

$$T_E = \frac{4}{\Omega\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}}, \quad m = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}} m_0^2 \quad (4.82)$$

若 m 趋于零, (cn, sn) 将趋于 (\cos, \sin) [Abramowitz & Stegun, 1964]。此处 $m \approx 3.941901 \times 10^{-14}$ (可由式 (4.82) 求得), 故 (cn, sn) 可认为等同于 (\cos, \sin) 。于是式 (4.80) 退化为

$$\begin{cases} m_1 = a \cos \sigma_E t \\ m_2 = b \sin \sigma_E t \\ m_3 = \sqrt{1 - m \sin^2 \sigma_E t} - 1 = \sqrt{1 + \frac{m}{2} (\cos 2\sigma_E t - 1)} - 1 \end{cases} \quad (4.83)$$

其中, $\sigma_E = 2\pi/T_E$ 为 Euler 频率 (注意 T_E 由式 (4.82) 严密定义)。式 (4.66)、(4.80) 和 (4.83) 均表明 Chandler 晃动轨迹为椭圆 (与前两种方法得出的结论一致): 椭圆形轨迹当然会导致自转轴极经纬度以半 Euler 周期波动, 而圆轨迹仅能引起经度以 Euler 周期波动, 且纬度恒定不变。这很好地解释了 Folgueira & Souchay [2005] 发现的自由极移的半 Chandler 周期成分, 只要注意到刚体地球的 Euler 周期即为真实地球的 Chandler 周期。

最后, 根据式 (4.79) 或 (4.83) 可知, ω_3 同样存在着半 Euler 周期 $T_E/2$ 的波动, 换言之, 三轴性将引起日长 (length of day, LOD) 的半 Euler 周期变化。

注意到 $\alpha = (C - B)/A = 3.27353 \times 10^{-3}$ 、 $\beta = (C - A)/B = 3.29549 \times 10^{-3}$ 、 $\gamma = (B - A)/C = 2.196 \times 10^{-5}$, 由式 (4.82) 可得 Euler 周期 $T_E = 304.461118$ 恒星日, 由式 (4.80) 可得 m_i ($i=1,2$)、 ω_3 以及 Chandler 晃动振幅 θ (参见图 4.5)。可见三轴性可使 Euler 周期延长 0.0017 恒星日 (旋转对称地球的 Euler 周期参见下文), 这与 Van Hoolst & Dehant [2002] 三轴性略微延长 Chandler 周期的结论也是相符的。此外, m_2 的振幅比 m_1 约大 0.67 mas (若考虑地球分层, 则约大 0.78 mas, 参见 Chen & Shen [2010a]), 此差异可被目前的极移观测手段 (精度优于 0.1 mas) 检测到; 不过 m_3 仅在 10^{-15} 量级 (相当于 10^{-10} s 的日长变化), 比目前的日长观测精度小 4~5 个量级, 故 ω_3 可视为常量。

Euler 动力学方程的求解方法可大致分为两类: 一类假定 $A = B < C$, 主要为地球物理学家所广泛采用; 另一类假定 $A < B < C$, 主要为理论物理学家所采用。

若假定 $A = B$, 于是有 $a = b$, 式 (4.83) 退化为传统形式: 自由晃动轨迹为圆, Euler 频率和周期分别为

$$\sigma_E^0 = \frac{C - \bar{A}}{\bar{A}} \Omega = \frac{2\alpha + \gamma - \alpha\gamma}{2 - \gamma + \alpha\gamma} \Omega \quad (\text{此处 } \bar{A} = \frac{A+B}{2}) \quad \text{和} \quad T_E^0 = \frac{2\pi}{\sigma_E^0}。$$

由此定义易知在 $A = B$ 假设下, $T_E^0 = 304.459417$ 恒星日, 比三轴情况的略小一些。

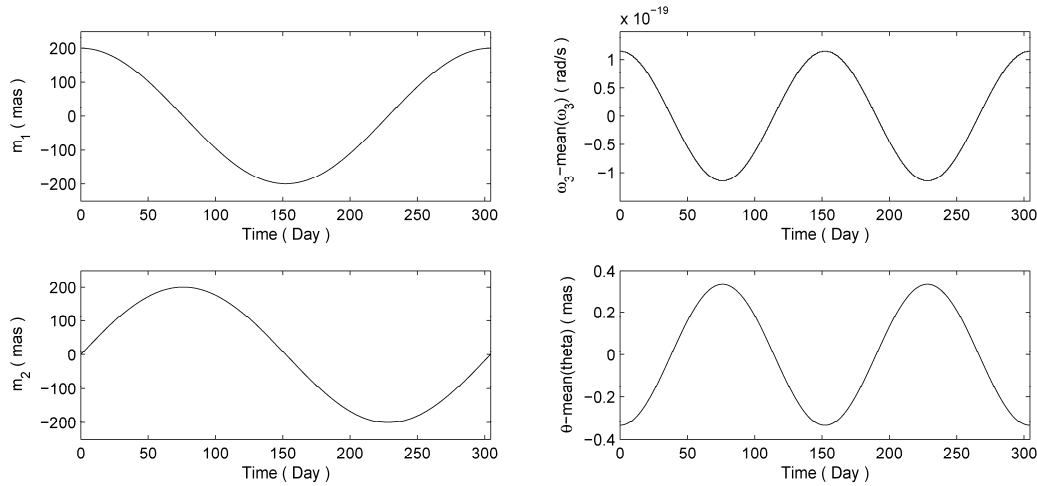


图 4.5 一个周期内的 Euler 晃动 (引自 Chen et al. [2009])

Fig.4.5 Parameters of the Euler wobble in the Earth's principal axial coordinate system (from Chen et al. [2009])

对于 $A < B < C$ 情形, 一些物理学家也导出了 Euler 动力学方程的椭圆函数解, 但选用的参数不同。他们考虑的是能量 E 和角动量 \mathbf{M} (分量为 M_i ($i=1,2,3$)) 的守恒, 即 [e.g., Laudau, 1975; Goldstein et al., 2002]

$$\begin{cases} A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2E \\ A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = M^2 \end{cases} \quad (4.84)$$

再根据式 (4.62) 和 (4.84), 他们得到

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{2EC - M^2}{A(C - A)}} \operatorname{cn}(\tau) \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2EC - M^2}{B(C - B)}} \operatorname{sn}(\tau) \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{M^2 - 2EA}{C(C - A)}} \operatorname{dn}(\tau) \end{cases} \quad (4.85)$$

其中

$$\begin{cases} \tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-ms^2)}} \\ \operatorname{sn}(\tau) = s \\ \operatorname{cn}(\tau) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(\tau)} \\ \operatorname{dn}(\tau) = \sqrt{1 - m \operatorname{sn}^2(\tau)} \end{cases} \quad (4.86)$$

尽管式 (4.85) 与式 (4.80) 形式相似, 并也可导出 $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{\alpha/\beta}$, 它们仍存在两个关键差异:

1. 真实地球内部圈层之间存在耗散性的电磁、粘滞耦合, 能量并不守恒, 因而旧的椭圆函数解不能推广到真实地球情形。本节理论没有假定能量 E 和角动量 M 守恒, 若合理推广, 可应用于真实地球 (参见 4.6.3 节);
2. 本节理论没有选用 E 和 M , 而是选取极移量作为椭圆积分参数 (参见 4.6.1 节)。极移的测量显然要容易和精确得多。

基于上述理由, 可认为在这三种理论中, 本节理论更为可取。

4.6.3 三轴地球的 Chandler 晃动

前两小节的讨论均是在主惯性轴坐标系中进行的, 而实际观测则是基于 ITRF 的, 因此有必要将本节理论转化到 ITRF 中。由于主惯性轴 A (与 ox_I 轴重合) 指向 $\lambda_A = 14.9285^\circ W$, 主惯性轴 C 倾角约为 $\theta_C \approx 0.1$ 角秒 [Chen & Shen, 2010a], 于是主惯性轴坐标系 $o-x_I y_I z_I$ 到协议地心坐标系 $o-xyz$ 的转换矩阵可表示为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_A \cos \theta_C & \sin \lambda_A \cos \theta_C & -\sin \theta_C \\ -\sin \lambda_A & \cos \lambda_A & 0 \\ \cos \lambda_A \sin \theta_C & \sin \lambda_A \sin \theta_C & \cos \theta_C \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

不过, θ_C 数值太小, 几乎对 m_i ($i=1,2,3$) 没有影响。因此, 取 $\cos \theta_C = 1$ 和 $\sin \theta_C = 0$ 可得

$$\begin{cases} m_1^E \approx a \cos \lambda_A \operatorname{cn}(u) + b \sin \lambda_A \operatorname{sn}(u) \approx a \cos \lambda_A \cos \sigma_E t + b \sin \lambda_A \sin \sigma_E t \\ m_2^E \approx -a \sin \lambda_A \operatorname{cn}(u) + b \cos \lambda_A \operatorname{sn}(u) \approx -a \sin \lambda_A \cos \sigma_E t + b \cos \lambda_A \sin \sigma_E t \end{cases} \quad (4.88)$$

其中 m_1^E 和 m_2^E 定义于协议地心坐标系 $o-xyz$ 中。若忽略 a 和 b 之间的微小差异, 取 $a = b = m_0$, 式 (4.88) 可简化为

$$\begin{cases} m_1^E \approx m_0 \cos(\sigma_E t - \lambda_A) \\ m_2^E \approx m_0 \sin(\sigma_E t - \lambda_A) \end{cases} \quad (4.89)$$

这表明 m_1^E 和 m_2^E 的初相位均近似等于 $\lambda_A \approx 15^\circ W$ 。为书写方便，下文将略去上标 E，但注意所有讨论均是在 $o-xyz$ 中进行的。

对于真实地球，Euler 频率 σ_E 应替换为 Chandler 频率 σ_C ，于是式 (4.88) 变为

$$\begin{cases} m_1 \approx a \cos \lambda_A \cos \sigma_C t + b \sin \lambda_A \sin \sigma_C t \\ m_2 \approx -a \sin \lambda_A \cos \sigma_C t + b \cos \lambda_A \sin \sigma_C t \end{cases}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (4.90)$$

其中 (k_s 和 k 分别为长期 Love 数和固体潮 Love 数)

$$\sigma_C \approx \frac{A}{A_m} \frac{k_s - k}{k_s} \sigma_E \approx 0.7 \sigma_E \quad (4.91)$$

根据式 (4.90) 可知

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_A \cos \sigma_C t & \sin \lambda_A \sin \sigma_C t \\ -\sin \lambda_A \cos \sigma_C t & \cos \lambda_A \sin \sigma_C t \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

注意到 $m_0 = \sqrt{ab}$ ，于是 Chandler 周期可写为

$$T_C = \frac{2\pi}{\sigma_C} \approx \frac{T_E}{0.7} \approx \frac{40}{7\Omega\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m\sin^2\varphi}}, \quad m = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}} m_0^2 \quad (4.93)$$

式 (4.93) 表明 Chandler 周期 T_C 和振幅 m_0 之间存在函数关系，即 $T_C = T_C(m_0)$ ，或反过来 $m_0 = m_0(T_C)$ 、 $m_0 = m_0(\sigma_C)$ 。

考察式 (4.90) 和 (4.93) (或式 (4.82) 和 (4.83)) 可发现：若将 a 、 b 看作 Chandler 晃动的瞬时半轴 ($m_0(t) = \sqrt{a(t)b(t)}$ 为瞬时平均半径)，则 T_C 或 σ_C 也将相应变化。对于式 (4.90) 而言， a 、 b 变化即为振幅调制，而 σ_C 变化则意味着频率调制。换言之，式 (4.90) 和 (4.93) 描述了 Chandler 晃动的振幅-频率双重调制性质 [Chen et al., 2009]。由于 m_0 的变化区间约为 $80 \sim 240$ mas，由式 (4.93) 易知参数 m 的变化区间为 $(1 \sim 8) \times 10^{-14}$ ，这保证了式 (4.82) 和 (4.93) 为 m 的增函数。至此从理论上阐明了 T_C 和 m_0 之间正相关关系，支持了 Chandler [1891]、Iijima [1965]、Carter [1981]、高布锡 [1997]、Höpfner [2003] 和 Liu et al. [2007] 等学者得出的 Chandler 周期可变的观测结果。

为检验此节理论模型，这里采用 IERS 发布的 EOP 05 C04 极移数据 $\tilde{p} = x - iy$ 。根据 Gross [1992]， \tilde{p} 和 \tilde{m} 存在如下关系

$$\tilde{m} = \tilde{p} - \frac{i}{\Omega} \dot{\tilde{p}} \quad (4.94)$$

于是可得瞬时自转轴坐标 $\tilde{m} = m_1 + im_2$ ，再经小波滤波可从 \tilde{m} 分离出 Chandler 成分 (参见图 4.6)。一旦从极移数据中分离出 Chandler 晃动，根据式 (4.92) 可获得 $a(t)$ 、 $b(t)$ 和 $m_0(t) = \sqrt{a(t)b(t)}$ 的时变值，再根据式 (4.93) 可由 $m_0(t)$ 得出时变的 $T_C(t)$ (参见图 4.7，其中 $m_0(t)$ 用 θ 表示)。

根据图 4.7， m_0 表现出复杂的波动，而 T_C 也同步同趋势变化； m_0 的变化幅度 (最大值与最小值之差) 约为 160 mas，而 T_C 的变化幅度约为 0.04 天。该结果较观测值偏小不少，这主要是因为此处未考虑地幔滞弹性和海洋极潮的影响，以及惯性张量变化的贡献。Dahlen [1976]、Smith [1977] 早已证实地幔滞弹性和海洋极潮可明显延长 Chandler 周期，Jochmann [2003]、申文斌等 [2008] 发现物质迁移导致的惯性张量变化可引起 Chandler 周期波动。若综合考虑这些影响，振幅-频率调制模型的预测值可能更加接近观测值，这有待后续研究。

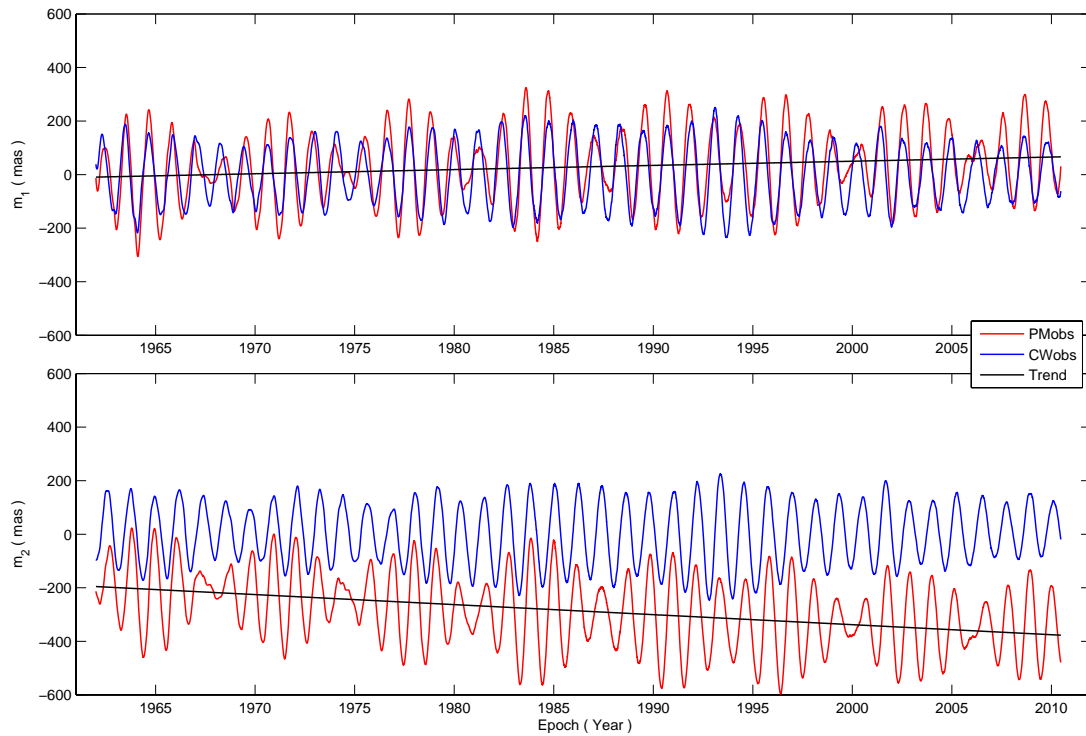


图 4.6 极移观测序列的长期趋势和 Chandler 成分 (根据 Chen et al. [2009] 重绘)

Figure 4.6 The observed polar parameters as well as their Chandler and secular components (reproduced from Chen et al. [2009])

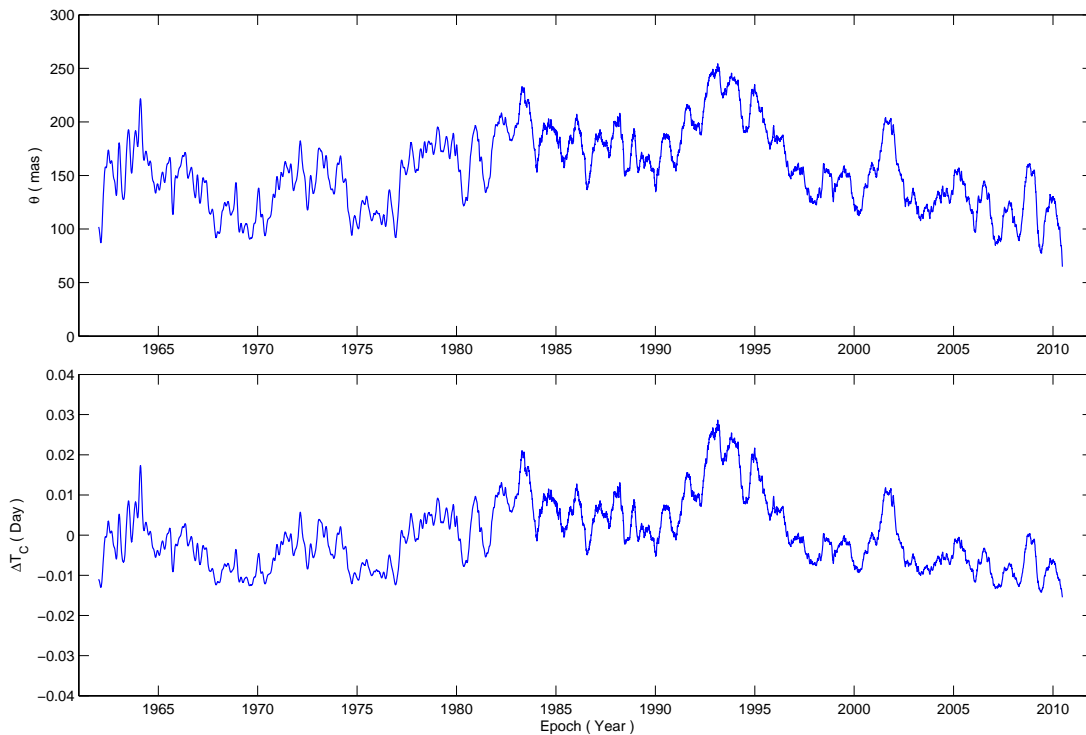


图 4.7 Chandler 晃动的振幅变化及其引起的 Chandler 周期变化 (根据 Chen et al. [2009] 重绘)

Figure 4.7 Variation of Chandler wobble amplitude and its influence on the Chandler period (reproduced from Chen et al. [2009])

另一方面，由前面得到的 $a(t)$ 、 $b(t)$ 可根据式 (4.90) 求得 Chandler 晃动的“模型预测值” $m_{CW} = m_{CW1} + m_{CW2}i$ ；对比 m_{CW} 与 Chandler 晃动“观测值” m_{CW}^{obs} (参见图 4.6) 即可检验 Chandler 晃动的振幅-频率调制模型以及初相位为 $15^\circ W$ 的结论。由图 4.8 可知， m_{CW} 与 m_{CW}^{obs} 的相位是比较符合的 (瞬时振幅 $a(t)$ 、 $b(t)$ 已作为输入值，故只需比较相位)，特别是在近 30 年时段上；较早时段上的相位不符可能来源于比值 γ/α 的变化，该比值反映了 A 、 B 、 C 的相对大小。注意到 A 、 B 、 C 值是基于 EGM2008 确定的，而 EGM2008 是根据近 30 年的重力观测数据解算的，因此在较早时段 m_{CW} 与 m_{CW}^{obs} 相位差异较大是很正常的。基于上述讨论，Chandler 晃动的振幅-频率调制模型是较为可信的，但还需要进一步完善。

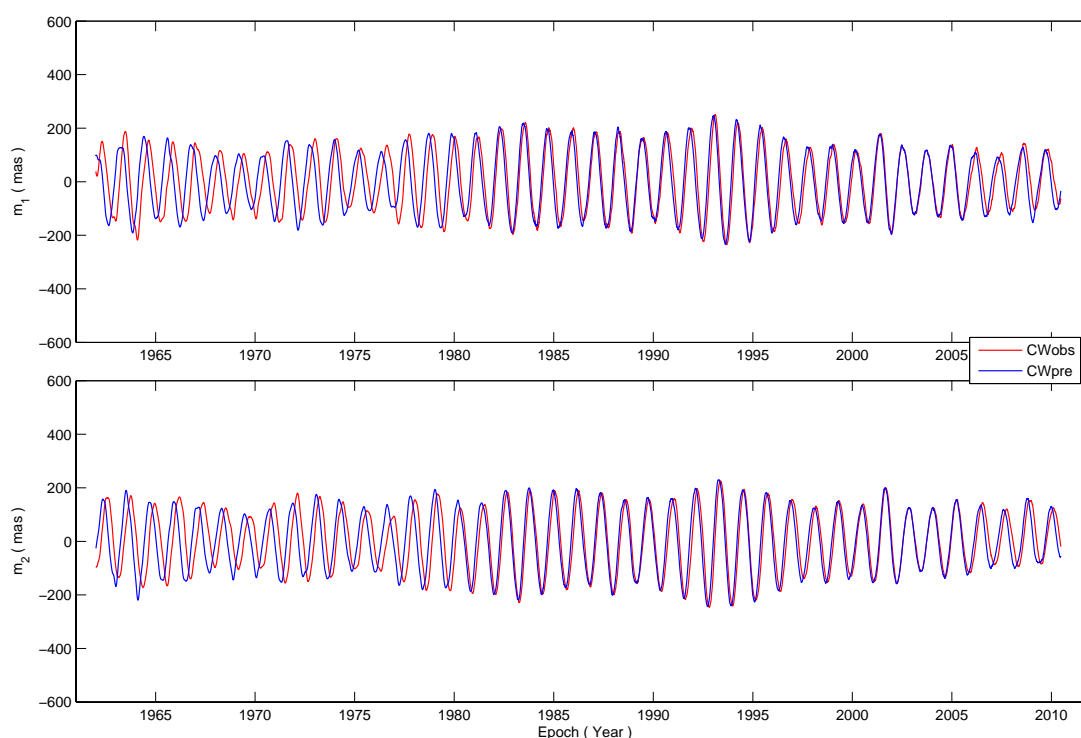


图 4.8 Chandler 晃动的理论模型值与观测值的比较 (根据 Chen et al. [2009] 重绘)

Figure 4.8 Comparisons between the theoretical and observed Chandler wobbles (reproduced from Chen et al. [2009])

4.7 本章小结与讨论

本章导出了三轴分层地球的极移理论，讨论了三轴地球的 Chandler 晃动和极移激发。对于三轴地球的极移激发，本章提出了“变量代换法”和“求导消元法”两种求解理论，其中前者较为简便和成熟，后者较为严密复杂且有待进一步发展；对于三轴地球的 Chandler 晃动，本章改进了前人的“椭圆积分-椭圆函数”求解理论，提出了 Chandler 晃动的振幅-频率调制模型。此外，三种理论一致阐明了 Chandler 晃动轨迹的椭圆性，与实际观测更为符合。

由于三轴性对极移激发的贡献仅在 0.1 mas 量级，远小于大气、海洋等激发的误差，故在极移激发问题中可不考虑三轴性影响。但对 Chandler 晃动而言，三轴性可引起其轨迹椭圆化，并导致振幅-频率调制现象，与实测 Chandler 晃动的椭圆性、周期与振幅可变性更为符合，故三轴性在研究 Chandler 晃动时应予以考虑。

第五章 极移激发中的频率依赖响应

5.1 地球的频率依赖响应

本文上一章讨论了地球三轴性对极移激发的影响，指出在目前精度范围内此影响是可忽略的。因此，本章将基于地球旋转对称假设讨论被传统理论所忽略的另一因素——地球对外部多频段扰动的频率依赖性。

地球并非一个理想的弹性体，她包含滞弹性的地幔及上覆的耗散性海洋。海潮耗散性和地幔滞弹性会导致地球对外部周期性扰动产生频率依赖响应（响应振幅随频率变化）及响应相位延迟 [e.g., Wahr & Sasao, 1981; Wahr & Bergen, 1986; Mathews et al., 1995; Mathews et al., 2002]。频率依赖响应使得转换函数不再是常数 [e.g., Eubanks, 1993]，而是与外部扰动的频率相关；响应相位延迟将为转换函数引入虚部，即转换函数变为复函数 [Chen & Shen, 2010a,b; Chen & Shen, 2011]。为表述方便，下文中“频率依赖”这一术语将既包含它本身，又包含“相位延迟”。

根据 Mathews et al. [2002]，可修改形变参数来包含海潮和地幔滞弹性的影响。对于本文研究最重要的参数 κ ，其顾及频率依赖性的表达式为

$$\kappa(\sigma) = \kappa^{SE}(\sigma) + \Delta\kappa^{OT}(\sigma) + \Delta\kappa^{AE}(\sigma) \quad (5.1)$$

其中 $\kappa^{SE}(\sigma)$ 描述固体地球的形变能力，而 $\Delta\kappa^{OT}(\sigma)$ 和 $\Delta\kappa^{AE}(\sigma)$ 为海潮和地幔滞弹性导致的增量。除了周日潮在周日频段的自由核章动共振 [e.g., Wahr & Sasao, 1981; Mathews et al., 1995] 外，极潮与地幔滞弹性也会导致 Chandler 频率处的共振效应 [e.g., Mathews & Bretagnon, 2003]。

若假设地球旋转对称，极移转换函数可表述为 (参见式 (4.38))

$$T^{L/NL} = (1+k')^\delta \frac{C-A}{C_m - A_m} \frac{e}{e - \kappa} \quad (5.2)$$

可知，若 κ 随频率变化，则转换函数也是频率依赖的。以下将根据相关理论和模型来确定 $\Delta\kappa^{OT}(\sigma)$ 和 $\Delta\kappa^{AE}(\sigma)$ ，并确定由式 (5.2) 所表述的频率依赖的转换函数。

5.1.1 海潮的影响

海潮通常按照周期划分为长、短期潮两部分：短期潮主要包括周日潮、半日潮和 1/3 日潮等 (参见表 5.1)；长期潮主要有 18.6 年潮、周年潮、半年潮、月潮、半月潮和 1/3 月潮等 (参见表 5.3，仅列出部分潮波)。一般而言，长期海潮接近于平衡潮 (即位移了的海平面与瞬时等位面重合)，因此与相应引潮力的相位差非常小，故耗散性也很小；短期海潮的海平面则不能在短短的一个周期内达到平衡状态，故滞后于相应的引潮力，具有较强的耗散性。特别地，由于自由核章动的周日共振效应，周日潮对形变参数的影响具有强烈的频率依赖特征。目前的卫星测高技术可较为精确地确定短期海潮 (特别是周日潮和半日潮) 参数，但由于数据长度有限，暂不能对长期海潮提供有力约束，故长期潮一般采用平衡潮理论或一些经验性方法来估计其参数 (因为海潮观测已证实长期潮与平衡潮之间存在较明显差异)。

Chen & Shen [2010a] 采用 Agnew & Farrell [1978] 的平衡潮理论及 Wahr & Bergen [1986] 的地

幔滞弹性理论构建了轴分层地球的、频率依赖的极移转换函数。不过，由该转换函数生成的有效激发函数仅在频域内优于传统理论，在时域内反而更差 [Chen & Shen, 2010a]。这说明平衡潮理论与实际长期潮的差异在地球自转研究中已不能忽略。Chen & Shen [2010b; 2011] 则采用 Gross [2009] 和 Dickman & Gross [2010] 提供的经验性或半理论的长期海潮模型，以及基于 Chandler 晃动周期和品质因子的经验性地幔滞弹性模型构建了旋转对称地球的、频率依赖的极移转换函数，并证实新的转换函数有明显改进，它产生的有效激发在时域和频域内均与实际观测激发更为符合，特别是在顺向周年频段上与观测值的符合度 (Coherence) 有了显著提高。因此，这里将采用经验性或半理论的长期海潮模型来考虑长期潮的影响。

根据式 (3.8) 对形变参数的定义，可知海潮引起的形变 (c^{OT} 和 h^{OT}/Ω) 对形变参数的贡献为

$$\Delta\kappa^{OT} = -\frac{(1+k')\Omega c^{OT} + h^{OT}}{\Omega A(\phi - m^{OT})} \quad (5.3)$$

其中， Ωc^{OT} 和 h^{OT} 分别对应于潮高和潮速的角动量； ϕ 为 Sasao et al. [1980] 引入的无量纲的引潮水位 (TGP)。

对于周日潮，IERS Conventions (2010) 提供了对应于该频段内潮波的 Love 数改正 Δk (参见表 5.1)，而 Love 数则可表述为 $k(\sigma) = k^0 + \Delta k(\sigma)$ ，其中 $k^0 \equiv k_{21}^0 = 0.29830 - 0.00144i$ 为基准值 (标称值)。注意到 k 和 κ 存在如下关系 [Mathews et al., 1995]

$$\kappa(\sigma) = \frac{\Omega^2 a^5}{3GA} k(\sigma) \quad (5.4)$$

于是 $\kappa(\sigma)$ 对应于周日潮的值得以确定。

表 5.1 Love 数 k_{21} 在周日潮频段的频率依赖改正 (单位: 10^{-5} ; 引自 IERS Conventions (2010) 表 6.5a)

Table 5.1 Corrections for the frequency dependence of k_{21} (Units: 10^{-5} ; from Table 6.5a of the IERS Conventions (2010))

潮波名	Doodson 编码	频率 (deg/hr)	Re $\Delta k(\sigma)$	Im $\Delta k(\sigma)$
$2Q_1$	125,755	12.85429	-29	3
σ_1	127,555	12.92714	-30	3
	135,645	13.39645	-45	5
Q_1	135,655	13.39866	-46	5
ρ_1	137,455	13.47151	-49	5
	135,545	13.94083	-82	7
O_1	135,555	13.94303	-83	7
τ_1	147,555	14.02517	-91	9
$N\tau_1$	153,655	14.41456	-168	14
	155,445	14.48520	-193	16
Lk_1	155,455	14.48741	-194	16
No_1	155,655	14.49669	-197	16
	155,665	14.49890	-198	16
χ_1	157,455	14.56955	-231	18
	157,465	14.57176	-233	18

π_1	162,556	14.91787	-834	58
	163,545	14.95673	-1117	76
P_1	163,555	14.95893	-1138	77
	164,554	15.00000	-1764	104
S_1	164,556	15.00000	-1764	104
	165,345	15.02958	-3048	92
	165,535	15.03665	-3630	195
	165,545	15.03886	-3845	229
K_1	165,555	15.04107	-4084	262
	165,565	15.04328	-4355	297
	165,575	15.04548	-4665	334
	166,455	15.07749	85693	21013
	166,544	15.07993	35203	2084
ψ_1	166,554	15.08214	22794	358
	166,556	15.08214	22780	358
	166,564	15.08434	16842	-85
	167,355	15.11392	3755	-189
	167,365	15.11613	3552	-182
ϕ_1	167,555	15.12321	3025	-160
	167,565	15.12542	2892	-154
	168,554	15.16427	1638	-93
θ_1	173,655	15.51259	370	-20
	173,665	15.51480	369	-20
	175,445	15.58323	325	-17
J_1	175,455	15.58545	324	-17
	175,465	15.58765	323	-16
So_1	183,555	16.05697	194	-8
	185,355	16.12989	185	-7
Oo_1	185,555	16.13911	184	-7
	185,565	16.14131	184	-7
	185,575	16.14352	184	-7
ν_1	195,455	16.68348	141	-4
	195,465	16.68569	141	-4

对于长期潮，本文采用 Gross [2009] 和 Dickman & Gross [2010] 提供的经验性或半理论的海潮模型。他们实际上根据 Eubanks [1993] 的极移理论给出了有效海潮激发 χ^{OT} (ocean tide excitation, OTE) 和潮汐极移 p^{OT} (tidal polar motion, TPM)。考虑到 Eubanks [1993] 的极移理论可表述为

$$\frac{i}{\sigma_c} \dot{p} + p = 1.098 \frac{c}{C-A} + 1.5961 \frac{h}{\Omega(C-A)} \quad (5.5)$$

$$C-A = 2.610 \times 10^{35} \text{ kg m}^2, \quad k' = -0.3010$$

并注意 m^{OT} 与 p^{OT} 存在如下关系 [e.g., Gross, 1992; Brzeziński, 1992; also see Gross, 2007]

$$m^{OT} = \left(1 + \frac{\sigma}{\Omega}\right) p^{OT} \quad (5.6)$$

联立式 (5.3)、(5.5) 和 (5.6) 可得海潮导致的形变参数增量为

$$\Delta\kappa^{OT} = -\frac{C-A}{1.5913A} \frac{\chi^{OT}}{\phi - (1 + \sigma/\Omega)p^{OT}} \quad (5.7)$$

其中, Gross [2009] 和 Dickman & Gross [2010] 提供的 OTE χ^{OT} 和 TPM p^{OT} 可参见表 5.2 (分别用 G09 和 DG10 表示此两种模型), Hartmann & Wenzel [1995] 和 Kudryavtsev [2004] 分别提供的引潮力位模型 HW95 和 KSM03 的相关项则列于表 5.3 (其中 HW95 可从 <http://bowie.gsfc.nasa.gov/hw95/> 获得, KSM03 可通过链接 <http://lnfm1.sai.msu.ru/neb/ksm/tgp/ksm03.dat> 下载; 此链接的 KSM03 数据已按照 HW95 格式正规化)。根据 HW95 给出的位系数 (C_{21j}, S_{21j}), 对应于某一频率 σ_j 的引潮力位 ϕ 可表示为

$$\phi_j = \frac{3N_{21}}{\Omega_0^2 a^2} (C_{21j} + iS_{21j}), \quad N_{21} = \sqrt{\frac{5}{3}} \quad (5.8)$$

上述模型可构成四种组合, 即 G09-HW95、G09-KSM03、DG10-HW95 和 DG10-KSM03。根据式 (5.7) 和 (5.8), 这些组合可给出不同的 $\kappa(\sigma)$ 估值, 但这些估值之间的差异很小。考虑到 DG10 模型已被 IERS conventions (2010) 采纳为新的潮汐极移模型; HW95 和 KSM03 分别基于 DE/LE (dynamic ephemeris / lunar ephemeris) 200 (Standish, 1982) 和 DE/LE 405 (Standish, 1998) 解算, 而后者的精度优于前者, 因此本文采用组合 DG10-KSM03 来确定海潮对转换函数的影响。

表 5.2 长期海潮对极移的激发 (引自 Gross [2009] 和 Dickman & Gross [2010])

Table 5.2 Long-period ocean-tidal excitations of polar motion
(from Gross [2009] and Dickman & Gross [2010])

	G09		G09		DG10		DG10	
	Prograde		Retrograde		Prograde		Retrograde	
	A_p (mas)	α_p (deg)	A_r (mas)	α_r (deg)	A_p (mas)	α_p (deg)	A_r (mas)	α_r (deg)
mtm	180.15	51.26	80.18	-26.98	205.83	67.21	269.95	21.17
Mtm	434.55	51.26	193.41	-26.98	497.59	67.27	652.59	21.14
mf	880.22	73.88	1205.93	39.27	841.32	88.42	1002.12	13.15
Mf	2123.44	73.88	2909.16	39.27	2028.73	88.53	2414.94	13.11
MSf					168.13	92.70	194.74	11.60
Mm	567.37	68.42	1391.36	34.62	643.61	123.13	520.16	-1.06
Msm					111.62	128.72	79.23	-4.36
Ssa					118.56	159.42	336.32	175.46
Sa					3.33	161.60	332.53	170.51

除引潮力外，地球自转导致的离心力同样会导致海洋形变 — 海洋极潮 (ocean pole tide)。极潮振幅与极移振幅成正比关系 [e.g., Petit & Luzum, 2010]，故由式 (5.3) 知极潮对 $\kappa(\sigma)$ 的影响 $\Delta\kappa^{OPT}(\sigma)$ 同样正比于极移振幅。注意到极移的频谱特性，确定 $\Delta\kappa^{OPT}(\sigma)$ 时只需考虑极移的两个主要成分 — Chandler 晃动和周年晃动。根据 IERS 公布的 EOP 05 C04 极移数据 (数据时段为 1993.1.1—2010.12.31)，本文基于最小二乘法的拟合结果表明：Chandler 晃动和周年晃动在近 18 年的平均振幅分别为 152.87 mas 和 90.09 mas。Mathews et al. [2002] 给出 Chandler 频率处的形变参数增量为 $\Delta\kappa(\sigma_C) = 1.51 \times 10^{-4}$ ，则易知周年频率处增量为 $\Delta\kappa(\sigma_A) = 0.89 \times 10^{-4}$ 。

本文讨论的海潮包括引潮力和离心力引起的海洋潮汐，因此海潮的总效应为上述各效应之和。

表 5.3 相应于长期海潮的引潮力位系数 (引自 Hartmann & Wenzel [1995] 和 Kudryavtsev [2004])

Table 5.3 Harmonics of the tide-generating potential corresponding to the long-period ocean tides
(from Hartmann & Wenzel [1995] and Kudryavtsev [2004])

	l	l'	F	D	Ω	Frequency (deg/hour)	Period (day)	HW95 C_{nm}	HW95 S_{nm}	KSM03 C_{nm}	KSM03 S_{nm}
mtm	1	0	2	0	1	1.64461415	9.12	-146096331	0	-146104281	1987
Mtm	1	0	2	0	2	1.64240775	9.13	-352500762	0	-352463397	12469
mf	0	0	2	0	1	1.10023945	13.63	-763323482	0	-763296589	9287
Mf	0	0	2	0	2	1.09803304	13.66	-1841039981	0	-1840904272	41241
MSf	0	0	0	2	0	1.01589576	14.77	-161328439	0	-161292612	-21681
Mm	1	0	0	0	0	0.54437471	27.56	-972501389	0	-972477777	5034
Msm	-1	0	0	2	0	0.47152105	31.81	-185961196	0	-185983779	8456
Ssa	0	0	2	-2	2	0.08213728	182.62	-856534056	0	-853586666	1452239
Sa	0	1	0	0	0	0.04106668	365.26	-136032244	0	-142476759	3128499

5.1.2 地幔滞弹性的影响

地幔滞弹性通常采用品质因子 Q 的频率依赖性来表示, IERS Conventions (2010) 推荐采用 Wahr & Bergen [1986] 给出的指数律表达式。若采用该指数律表达式，地幔滞弹性导致的形变参数增量 $\Delta\kappa^{AE}(\sigma)$ 将正比于函数 [Mathews et al., 2002]

$$F(\sigma; \sigma_m, \alpha) = \cot \frac{\alpha\pi}{2} \left\{ 1 - (\sigma_m/\sigma)^\alpha \right\} - i s_\sigma (\sigma_m/\sigma)^\alpha \quad (5.9)$$

$$\alpha = 0.15, s_\sigma = \sigma/|\sigma|$$

目前对地幔滞弹性的了解在大部分频段上都是很粗略的，但 Chandler 频段例外。国内外学者对 Chandler 晃动周期和品质因子开展了广泛而深入的研究 [e.g., Dahlen, 1976; Smith, 1977; Vicente & Wilson, 1997; Mathews et al., 2002]，为 Chandler 频段处的地幔滞弹性提供了较好的约束 (尽管这些约束仍有待加强)。因此，本文将采用 Chandler 频段处的形变参数增量 $\Delta\kappa^{AE}$ 和指数律来考虑地幔滞弹性影响。

根据 Mathews et al. [1991a; 2002]，Chandler 频率可表示为

$$\sigma_C = \frac{1}{T_C} \left(1 + \frac{i}{2Q_C} \right) = \frac{A}{A_m} (e - \kappa_{CW}) \quad (5.10)$$

于是

$$\kappa_{CW} \equiv \kappa(\sigma_C) = e^{-\frac{A_m}{AT_C} \left(1 + \frac{i}{2Q_C}\right)} \quad (5.11)$$

由式 (5.11) 可知, 给定 Chandler 晃动周期 T_C 和品质因子 Q_C 即可确定 κ_{CW} 。

基于最新的理论及观测结果 [e.g., Vicente & Wilson, 1997; Mathews et al., 2002; Chen & Shen, 2010a], 本文选取 $T_C = 433$ 平太阳日 (mean solar days) 及 $Q_C = 100$, 易得 $\kappa_{CW} = 1.237857 \times 10^{-3} - 1.023329 \times 10^{-5} i$ 。

注意到 $\kappa(\sigma_C) = \kappa^{SE} + \Delta\kappa^{OT}(\sigma_C) + \Delta\kappa^{AE}(\sigma_C)$ (或 $\kappa_{CW} = \kappa^{SE} + \Delta\kappa_{CW}^{OT} + \Delta\kappa_{CW}^{AE}$), 根据 Mathews et al. [2002], $\kappa^{SE} = 1.034 \times 10^{-3}$, $\Delta\kappa_{CW}^{OT} = 1.51 \times 10^{-4}$, 可知

$$\Delta\kappa_{CW}^{AE} = \kappa_{CW} - \kappa_0 - \Delta\kappa_{CW}^{OT} = (4.2686 - 1.0233i) \times 10^{-5} \quad (5.12)$$

该估值与 Mathews et al. [2002] 根据指数律得到的理论结果 $\Delta\kappa_{CW}^{AE} = (4.381 - 1.205i) \times 10^{-5}$ (相应的 Chandler 周期和品质因子分别为 430.3 天和 88.4) 相当符合。在 Mathews et al. [2002] 理论中, κ^{SE} 值为拟合 VLBI 观测的结果, $\Delta\kappa_{CW}^{OT}$ 值则由极潮理论和观测确定, $\Delta\kappa_{CW}^{AE}$ 值与它们无必然联系, 故可取本文式 (5.12) 所示数值, 该数值与 Chandler 周期和品质因子的观测值更为符合。

根据式 (5.9) 和 Chandler 频率处的形变参数增量 $\Delta\kappa_{CW}^{AE} \equiv \Delta\kappa^{AE}(\sigma_C)$, 任意频率 σ 处的增量 $\Delta\kappa^{AE}(\sigma)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \Delta\kappa^{AE} &= \text{Re} \Delta\kappa^{AE} + i \cdot \text{Im} \Delta\kappa^{AE}, \quad \sigma_0 = \text{Re} \sigma_{CW} \\ \text{Re} \Delta\kappa^{AE}(\sigma) &= \frac{1 - (\sigma_m/\sigma)^\alpha}{1 - (\sigma_m/\sigma_0)^\alpha} \text{Re} \Delta\kappa_{CW}^{AE} \\ \text{Im} \Delta\kappa^{AE}(\sigma) &= \frac{s_\sigma (\sigma_m/\sigma)^\alpha}{(\sigma_m/\sigma_0)^\alpha} \text{Im} \Delta\kappa_{CW}^{AE} \end{aligned} \quad (5.13)$$

于是地幔滞弹性对形变参数 κ 的影响得以确定。

5.1.3 负荷 Love 数频率依赖性的经验模型

海潮和地幔滞弹性同样影响二阶一次负荷 Love 数 k' [e.g., Wahr & Sasao, 1981; Mathews et al., 1995; Petit & Luzum, 2010]。本文假设 k' 和 k 具有类似的频散性 (Dickman [1993] 也采用了此假设), 即

$$k'(\sigma) = \frac{-0.30808}{0.29830} k(\sigma) = -\frac{0.30808}{0.29830} \frac{3GA}{\Omega^2 a^5} \kappa(\sigma) \quad (5.14)$$

其中, $\kappa(\sigma)$ 已包含了海潮和地幔的影响 (参见式 (5.1) 和 (5.4)); 数值 0.29830 和 -0.30808 分别为 k 和 k' 的标称值 [Petit & Luzum, 2010]。

至此, $\kappa(\sigma)$ 和 $k'(\sigma)$ 均已确定, 由式 (5.2) 可知频率依赖的转换函数 $T^{L/NL}(\sigma)$ 也得以确定。具体过程参见第 3.2 节。

5.2 确定频率依赖的转换函数

基于 3.1 节的理论及相关模型, 可获得由式 (5.2) 表述的转换函数的离散值 (参见图 5.1 中的

钻石符号)。这些离散值不便使用，故有必要为转换函数构建显式函数表达式以便于实际应用。

根据图 5.1，这些离散值在 Chandler 和 FCN 频率附近存在明显的共振现象。因此，可假定转换函数具有如下形式 [Chen & Shen, 2011]:

$$\begin{cases} T^{NL}(\sigma) = f_D^{NL}(\sigma)f_R^{NL}(\sigma) \\ T^L(\sigma) = f_D^L(\sigma)f_R^L(\sigma) \end{cases} \quad (5.15)$$

其中， $f_D(\sigma)$ 和 $f_R(\sigma)$ 分别为极移动力响应因子和共振响应因子： $f_D(\sigma)$ 描述地球在全频段（除共振频率附近外）对周期性扰动的响应，而 $f_R(\sigma)$ 则刻画在共振频率处及其附近的响应。

本文采用 MatLab™ 的曲线拟合工具箱 (curve-fitting toolbox) 来确定 $f_D(\sigma)$ 。在拟合过程中，设置拟合模式为稳健型 (robust)，且排除了共振附近的数据点。若取频率 σ 单位为周每天 (cycles per solar day, cpd)，则拟合结果为

$$\begin{aligned} f_D^{NL}(\sigma) &= \text{Re } f_D^{NL}(\sigma) + i \cdot \text{Im } f_D^{NL}(\sigma) \\ \text{Re } f_D^{NL}(\sigma) &= -0.06216\sigma^5 + 0.03008\sigma^4 + 0.09505\sigma^3 - 0.06916\sigma^2 - 0.03548\sigma + 1.6450 \\ \text{Im } f_D^{NL}(\sigma) &= -0.02009\sigma^5 + 0.004537\sigma^4 + 0.04386\sigma^3 - 0.01214\sigma^2 - 0.02647\sigma + 0.004135 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} f_D^L(\sigma) &= \text{Re } f_D^L(\sigma) + i \cdot \text{Im } f_D^L(\sigma) \\ \text{Re } f_D^L(\sigma) &= -0.08927\sigma^5 + 0.03423\sigma^4 + 0.1373\sigma^3 - 0.08179\sigma^2 - 0.05161\sigma + 1.1480 \\ \text{Im } f_D^L(\sigma) &= -0.004367\sigma^5 + 0.01185\sigma^4 + 0.008728\sigma^3 - 0.02024\sigma^2 - 0.003154\sigma + 0.004002 \end{aligned} \quad (5.17)$$

较其它阶而言，以上四个 5 阶多项式相对于离散值具有最小的均方根误差 (root-mean-square error, RMSE)。其中， $\text{Re } f_D^{NL}(\sigma)$ 、 $\text{Im } f_D^{NL}(\sigma)$ 、 $\text{Re } f_D^L(\sigma)$ 和 $\text{Im } f_D^L(\sigma)$ 的均方根误差分别为 0.002091, 0.0007685, 0.002907 和 0.0007647。

当 $f_D(\sigma)$ 确定后， $f_R(\sigma) = T(\sigma)/f_D(\sigma)$ 也可确定

$$\begin{aligned} f_R^{NL}(\sigma) &= 1 + \frac{F_1^{NL}}{\sigma - \sigma_C} + \frac{F_2^{NL}}{\sigma - \sigma_F} \\ F_1^{NL} &= 3.9798 \times 10^{-5} - 7.5571 \times 10^{-6} i \\ F_2^{NL} &= -3.6147 \times 10^{-5} - 4.4336 \times 10^{-6} i \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} f_R^L(\sigma) &= 1 + \frac{F_1^L}{\sigma - \sigma_C} + \frac{F_2^L}{\sigma - \sigma_F} \\ F_1^L &= 7.1930 \times 10^{-5} - 9.6753 \times 10^{-6} i \\ F_2^L &= -7.1046 \times 10^{-5} - 8.7980 \times 10^{-6} i \end{aligned} \quad (5.19)$$

其中 Chandler 和 FCN 频率分别为

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{1}{T_C} \left(1 + \frac{i}{2Q_C} \right), \quad T_C = 433 \text{ days}, \quad Q_C = 100 \\ \sigma_F &= \frac{1}{T_F} \left(1 + \frac{i}{2Q_F} \right), \quad T_F = -1 + \frac{1}{429} \text{ days}, \quad Q_F = 20000 \end{aligned} \quad (5.20)$$

此处本征模周期和品质因子如此选值是为了与 Vicente & Wilson [1997]、Mathews et al. [2002]、Rosat & Lambert [2009] 和 Chen & Shen [2010a] 给出的理论和观测估计值相一致。由式 (5.15) — (5.20) 表述的转换函数 $T^{NL}(\sigma)$ 和 $T^L(\sigma)$ (参见图 5.1 中实线) 相对于离散值的均方根误差分别为 0.0527 -

0.0214i 和 $0.0753 - 0.0307i$ 。

由图 5.1 可知，转换函数的拟合结果是令人满意的：在大部分频段，拟合曲线与离散值非常符合，仅在图最左端处（小于 -1 cpd）有较大偏差。不过，根据第 24 届国际天文协会大会（IAU General Assembly）的 B1.7 号决议，参考极 CIP 在地固系中的运动（即极移）包含频率小于 -1.5 cpd 或大于 -0.5 cpd 的所有运动（参见 Petit & Luzum [2010]）。因此，拟合曲线在小于 -1 cpd 频段（已不处于极移频段内）的不佳表现并不影响拟合转换函数的精度——此处的拟合转换函数适用于描述地球在 $[-0.5$ cpd, 1 cpd] 频段内的极移响应。

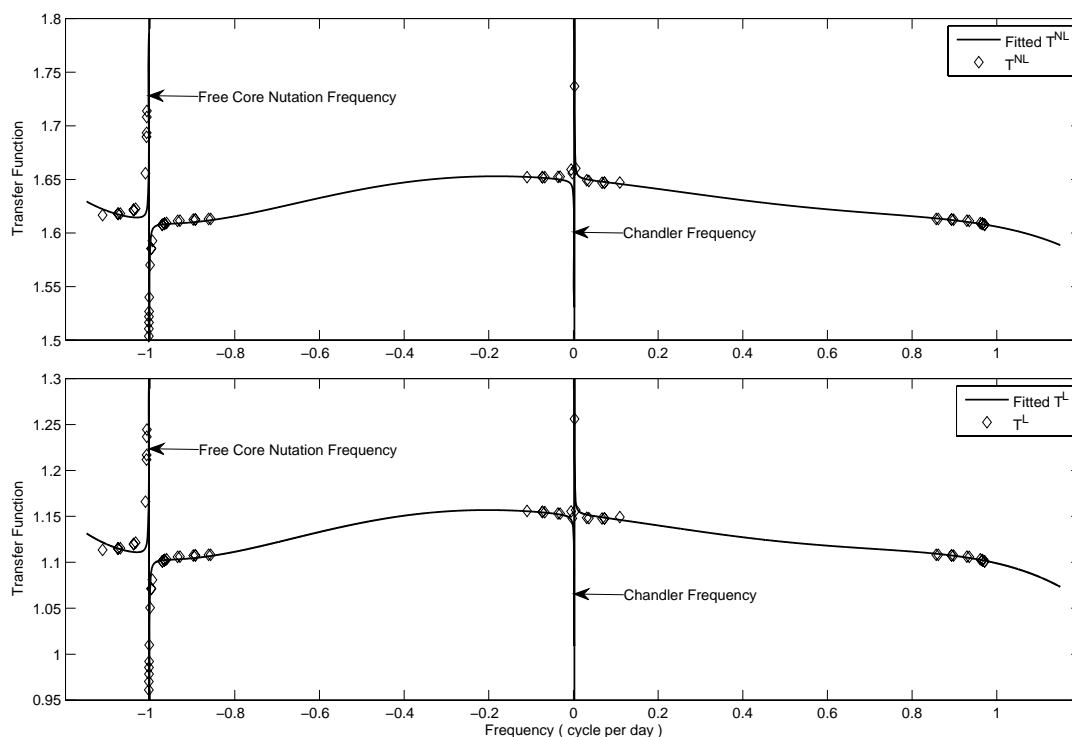


图 5.1 频率依赖转换函数的离散值和拟合曲线

Fig.5.1 Discrete values and fitted curves of the frequency-dependent transfer functions

表 5.4 T_C 和 Q_C 取值对共振响应因子的影响

Table 5.4 Effects of T_C and Q_C on the resonant response factors

T_C	Q_C	F_1^{NL}	F_1^L
433	50	$3.9623 \times 10^{-5} - 8.6348 \times 10^{-6}i$	$7.1721 \times 10^{-5} - 11.6202 \times 10^{-6}i$
	200	$3.9885 \times 10^{-5} - 7.0183 \times 10^{-6}i$	$7.2034 \times 10^{-5} - 8.7029 \times 10^{-6}i$
430	100	$3.8314 \times 10^{-5} - 7.3260 \times 10^{-6}i$	$6.9236 \times 10^{-5} - 9.4034 \times 10^{-6}i$
		$4.0775 \times 10^{-5} - 7.7092 \times 10^{-6}i$	$7.3704 \times 10^{-5} - 9.8543 \times 10^{-6}i$
433	100	$3.9798 \times 10^{-5} - 7.5571 \times 10^{-6}i$	$7.1930 \times 10^{-5} - 9.6753 \times 10^{-6}i$

由于 T_C 和 Q_C (特别是 Q_C) 的数值尚存在一定的不确定性 (较为公认的范围为 $430 \leq T_C \leq 435$ 天和 $50 \leq Q_C \leq 200$), 有必要检验拟合转换函数对 T_C 和 Q_C 取值的敏感程度。经定量计算, 本文发现动力响应因子几乎不随 T_C 、 Q_C 取值变化而改变, 但共振响应因子对 T_C 、 Q_C 取值较为敏感 (特别是对 T_C , 参见表 5.4)。不过, 进一步的分析表明, 由拟合转换函数生成的有效激发函数 (以大气、海洋联合激发为算例) 对共振响应因子的变化并不敏感: 若共振响应因子的参数 F_1^{NL} 和 F_1^L 各改变 0.1×10^{-5} , 有效激发函数仅变化约 0.05 mas。再考虑表 5.4 列出的极端情况, 可知选取不同但合理的 T_C 、 Q_C 值代入式 (5.15) — (5.20) 表示的拟合转换函数也是可行的 — 这样造成的有效激发函数误差小于 0.2 mas。

5.3 与传统理论的数值比较: 应用于大气、海洋联合激发

本节同样采用大气和海洋激发为例阐明频率依赖响应对极移激发的影响, 所用数据仍为 NCEP AAM、ECCO OAM 和 EOP 05 C04 时间序列 (关于数据的详细说明参见 4.4 节)。为与式 (5.20) 一致, 本文在利用 EOP 05 C04 极移序列计算观测激发 (以 χ^{obs} 表示) 时选取 $T_C = 433$ 天、 $Q_C = 100$ 。

经与 Eubanks [1993] 理论计算的有效激发函数 (以 χ_{eff}^0 表示) 比较, 本文理论给出的有效激发函数 (以 χ_{eff} 表示) 可减小观测激发 χ^{obs} 的未解释部分: 相对于 χ_{eff}^0 , χ_{eff} 有约 5 mas (为峰对峰差值, 主要具有周年频率, 参见图 5.2) 的改进, 即 $(\chi^{obs} - \chi_{eff})$ 的振幅比 $(\chi^{obs} - \chi_{eff}^0)$ 要小。约 5 mas 的差异完全可被目前的大地测量手段检测到, 但却被大气、海洋激发的较大误差掩盖了。目前的地球物理流体 (如大气、海洋、陆地水、液核等) 模型仍具有较大的不确定性, 不同机构发布的大气、海洋激发的差异显著大于 5 mas [e.g., Brzeziński et al., 2009; Brzeziński, 2011; Chen and Shen, 2011]。因此, 在时域中难以检测出频率依赖响应对极移的影响。换言之, 在时域内比较频率依赖转换函数 $T^{NL}(\sigma)$ 、 $T^L(\sigma)$ 与传统的转换常数 1.098、1.5913 的优劣是不明智的。

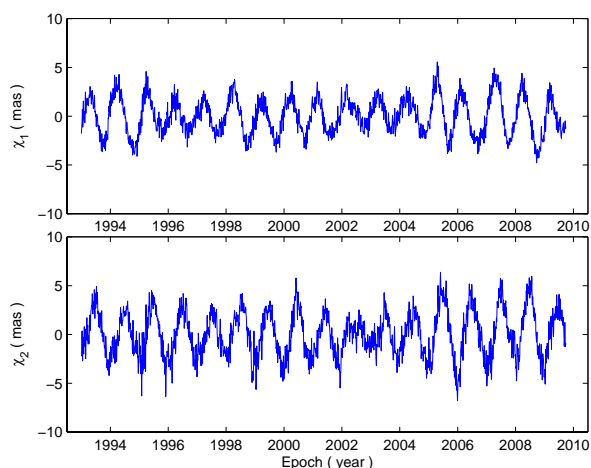


图 5.2 考虑大气-海洋激发时 χ_{eff}^0 (Tra) 与 χ_{eff} (Fre) 的差异

Fig.5.2 The difference between χ_{eff}^0 (Tra) and χ_{eff} (Fre) for the atmospheric-oceanic excitation

现转入频域考察频率依赖响应对极移的影响。本文采用多窗口法 (multitaper method) 计算了 χ_{eff} 、 χ_{eff}^0 和 χ^{obs} 的功率谱密度 (power spectrum density, PSD) 并对三者进行了比较 (参见图 5.3, 其中 PSD(x) 表示变量 x 的功率谱密度)。同时, 本文也计算了 χ_{eff} 与 χ^{obs} 、 χ_{eff}^0 与 χ^{obs} 的符合度, 以及

χ_{eff} 、 χ_{eff}^0 和 χ^{obs} 三者之间的瞬时相位差 (分别参见图 5.4 的左右分图)。这里, 正负频率分别对应极移的顺向和逆向分量。一般认为, IB 假设适用于描述海平面 10 天或更长周期对大气压变化的响应, 故图 5.3 上图和图 5.4 左图仅展示相应频段 $[-36.5, 36.5]$ 周每年 (cycles per year, cpy) 的信号; 图 5.3 下图则显示了其中的一个更窄频段 $[-5, 5]$ cpy 的谱密度来突出细节。

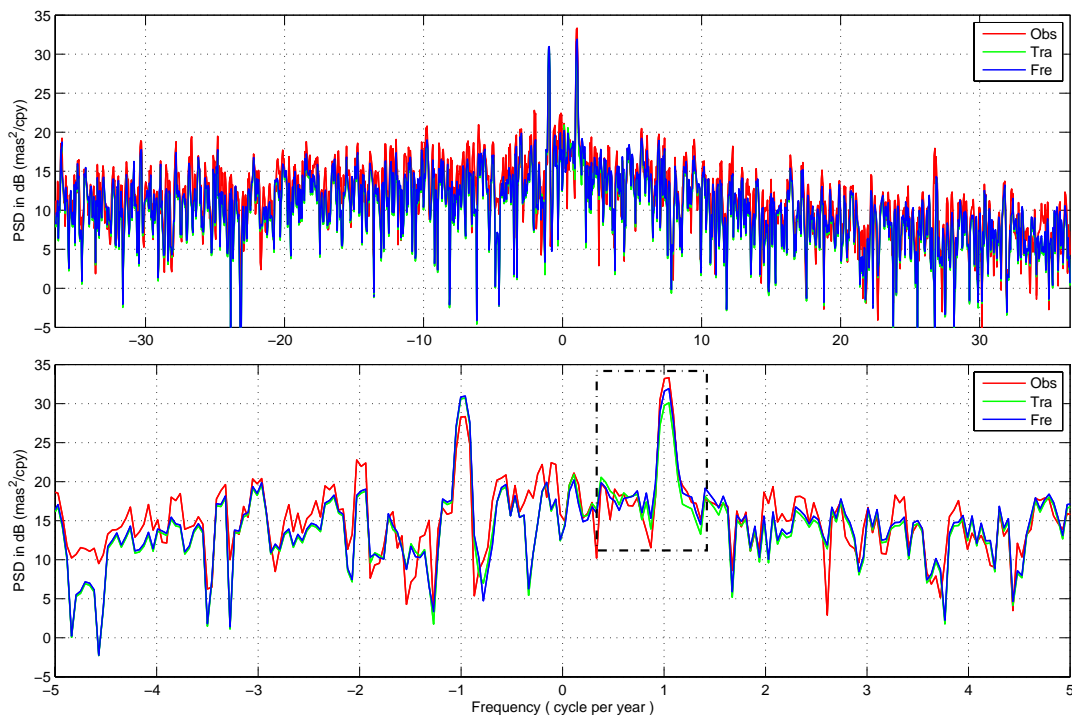


图 5.3 观测激发 χ^{obs} (Obs) 与大气-海洋激发 χ_{eff}^0 (Tra) 及 χ_{eff} (Fre) 的功率谱密度比较
Fig.5.3 Power spectra density (PSD) comparisons among χ^{obs} (Obs), χ_{eff}^0 (Tra) and χ_{eff} (Fre)

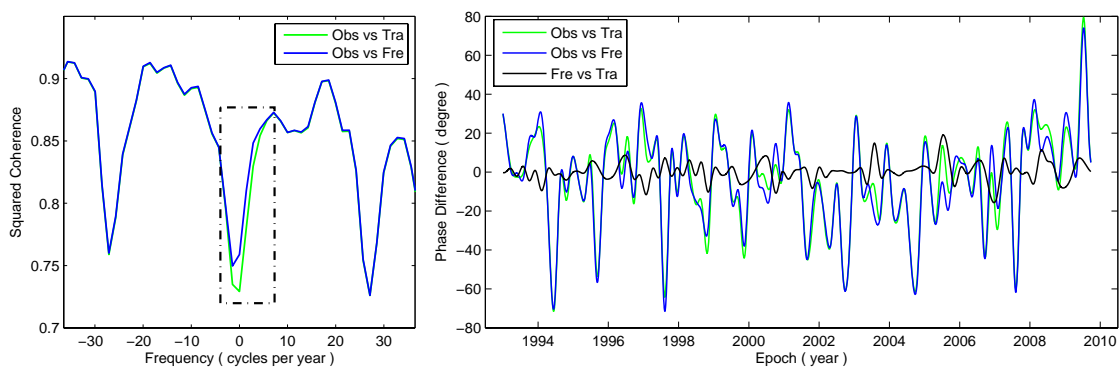


图 5.4 观测激发与地球物理激发的符合度和瞬时相位比较 (相位曲线已作平滑以得到较好视觉效果)
Fig.5.4 Coherence and phase comparisons between the geodetic and geophysical excitations (These phase-difference curves are smoothed to present better visual effects)

由图 5.3 和图 5.4 左图可知, 相对于传统理论, 本文理论得到的结果与观测激发无论是在谱密度的接近程度还是在符合度方面均有明显提高 (特别是在 +1 cpy 频段)。这是因为频率依赖转换函数考虑了传统转换常数所忽略的 Chandler 频率共振效应 (参见图 5.1)。根据图 5.4 右图, χ_{eff} 与 χ^{obs} 的相位差大体上小于 χ_{eff}^0 与 χ^{obs} 的, 但改进不大。这是因为频率依赖转换函数的虚部很小, 与传统

理论的相位差也必然很小。因此，观测激发与地球物理激发之间较大的相位差应主要来源于大气和海洋模型本身的误差。

综合考察本文结果，为何采用频率依赖转换函数仅使顺向周年激发得到改善，而其它频段与传统理论无明显差别？其原因可陈述如下 [Chen & Shen, 2011]:

- i. 大气、海洋激发的功率主要集中于周年频段，而不是均匀分布在整个频域上，即大气、海洋激发以周年成分为主；
- ii. 频率依赖转换函数 $T^{NL}(\sigma)$ 、 $T^L(\sigma)$ 与传统的转换常数 1.098、1.5913 的数值差异在大部分频段上都是很小的，而 Chandler 频率附近（限频率增大的一侧）的数值则由于共振效应得到显著放大，故顺向周年频段处的转换函数会明显大于 1.098、1.5913；
- iii. 由于第 i 和第 ii 条原因，有效大气、海洋激发（大气、海洋与转换函数的乘积）在频域内会被不均匀放大，而显著放大的顺向周年激发就可以与观测激发更好地符合。

基于上述理由，考虑频率依赖仅能明显改进较低频段特别是顺向周年频段的激发（在其它频段也有或多或少的改进，但十分微弱）。因此，在整个频域内比较频率依赖转换函数 $T^{NL}(\sigma)$ 、 $T^L(\sigma)$ 与传统的转换常数 1.098、1.5913 的优劣也是不明智的，这样会使二者周年频段的显著差异平均至全频段而减小到看不出明显差别。尽管在时域和整个频域比较两种理论均不利于突出二者的差异，以下仍将给出二者在时域和整个频域的统计信息以充分证实本文理论的优越性。

在表 5.5 中，本文列出了 χ_{eff}^0 、 χ_{eff} 、 χ^{obs} 以及 $PSD(\chi_{eff}^0)$ 、 $PSD(\chi_{eff})$ 、 $PSD(\chi^{obs})$ 之间的均方根差异 (root-mean-square differences, RMSD)。由于频率依赖响应的贡献主要体现在较低频段，本文对 χ^{obs} 、 χ_{eff}^0 和 χ_{eff} 分别应用了截止频率为 40 cpy (对应周期约为 9 天) 的低通 Butterworth 滤波器以去掉高频信号。滤波后的数值列于表 5.5 第二列，而本文理论相对于传统理论的改进则列于第三列。尽管频率依赖效应被削弱，比较这些 RMSD 仍可看出 χ_{eff} 无论在频域还是在时域均优于 χ_{eff}^0 ，而 Chen & Shen [2010a] 给出的早期结果仅在频域有较好表现（因为早期结果是采用理论模型计算的，目前结果是基于半理论或经验性模型的，而半理论或经验性模型一般优于纯理论模型）。注意表 5.5 中第四、五行数值对应于频段 $[-182.5, 182.5]$ cpy。若将比较局限于 $[-36.5, 36.5]$ cpy，则 $RMS(PSD(\chi^{obs}) - PSD(\chi_{eff})) = 2.5564 \text{ mas}^2/\text{cpy}$ ， $RMS(PSD(\chi^{obs}) - PSD(\chi_{eff}^0)) = 2.7134 \text{ mas}^2/\text{cpy}$ ，相应的改进值为 $(2.7134 - 2.5564) / 2.5564 = 6.14\%$ 。因此，本文理论相对于 Eubanks [1993] 理论在时域和频域的改进分别约为 3% 和 6%。

表 5.5 均方根差异的比较
Table 5.5 Comparisons of RMS differences

	滤波后数值	改进
$RMS(\chi^{obs} - \chi_{eff})$	19.2341 mas	$\frac{19.7766 - 19.2341}{19.2341} = 2.82\%$
$RMS(\chi^{obs} - \chi_{eff}^0)$	19.7766 mas	
$RMS(PSD(\chi^{obs}) - PSD(\chi_{eff}))$	4.9665 mas^2/cpy	$\frac{5.2538 - 4.9665}{4.9665} = 5.78\%$
$RMS(PSD(\chi^{obs}) - PSD(\chi_{eff}^0))$	5.2538 mas^2/cpy	

基于上述讨论，可认为本文导出的频率依赖转换函数 $T^{NL}(\sigma)$ 、 $T^L(\sigma)$ 比传统的转换常数 1.098、1.5913 更为准确地描述了地球对不同频率扰动的响应。考虑到目前极移观测和地球物理流体模型的精度（特别是地球物理流体模型精度的迅速提高），研究极移激发问题时应顾及频率依赖响应的影响。本文第六章将采用不同机构发布的不同版本的地球物理流体模型进一步讨论频率依赖响应，并比较检验各种地球物理流体模型的可靠性。

5.4 与传统理论的物理意义比较：相关模型的一致性与合理性

本节将从物理意义的角度来论证本文理论相对于传统理论的合理性。这里的物理意义主要是指地球动力学形状参数、形变参数（或 Love 数）的合理性、准确性以及相关参数之间的一致性。

不同自转理论的基本方程均可表示为

$$\frac{i}{\sigma_C} \dot{p} + p = \chi_{eff} \quad (5.21)$$

只是在转换函数和有效激发函数方面有差别。以下先证明本文转换函数与传统转换函数理论表达式的一致性，再讨论各转换函数取值的合理性。

一般地，转换函数可表示为 [Gross, 2007; Dobslaw et al., 2010]

$$T^{L/NL} = (1+k')^\delta \frac{k_s}{k_s - k} \frac{C - A}{C_m - A_m} \quad (5.22)$$

而有效激发函数则可写为

$$\chi_{eff} = T^L \frac{c}{C - A} + T^{NL} \frac{h}{\Omega(C - A)} \quad (5.23)$$

注意到长期 Love 数为

$$k_s = \frac{3G(C - A)}{\Omega^2 a^5} = \frac{3GAe}{\Omega^2 a^5} \quad (5.24)$$

则式 (5.4) 可改写为

$$\kappa = \frac{e}{k_s} k \quad (5.25)$$

根据式 (5.25)，易知式 (5.22) 与本文转换函数

$$T^{L/NL} = (1+k')^\delta \frac{C - A}{C_m - A_m} \frac{e}{e - \kappa} \quad (5.26)$$

完全等价。

由式 (5.22) 或 (5.26) 可知，不同的地球模型或观测将给出不同的动力学形状参数和形变参数（或 Love 数），进而可得到不同的转换函数。Munk & MacDonald [1960]、Lambeck [1980]、Moritz & Mueller [1987]、Barnes et al. [1983]、Wahr [1983]、Eubanks [1993]、Gross [2007] 和 Dobslaw et al. [2010] 等分别估算了转换常数的数值，这里仅选出具有代表性的四组列于表 5.6 中。这些都属于传统自转理论，因为它们均将地球响应视为常数。

表 5.6 中，Barnes et al. [1983]、Wahr [1983] 和 Eubanks [1993] 理论的动力学形状参数是基于“流体静力平衡假设 + 球形分层地球模型（如 1066A、PREM 等）”的，Love 数则部分采用地球模型推导值，部分采用当时观测值；Dobslaw et al. [2010] 采用了 Groten [2004] 推荐的 A, C 值（基于重力场模型 JGM-3），但采用了 Mathews et al. [1991b] 的 A_m, C_m 值（基于“流体静力平衡假设 + 球形分层地球模型 PREM”），Love 数引自 Dickey [1995]；本文理论的动力学形状参数基于第二章给出

的自相符的 (self-consistent) 分层地球模型 (或参见 Chen & Shen [2010a]), 形变参数则基于 IERS Conventions (2010) 推荐值 (周日频段直接采用推荐值, 长期潮频段则采用推荐海潮模型解算; 本文形变参数换算成 Love 数后, 在周日频段和长期潮频段的基准值分别与 IERS Conventions (2010) 推荐值吻合)。

表 5.6 不同自转理论的地球物理参数比较

Table 5.6 Comparisons of the geophysical parameters for different theories

	Barnes et al. [1983]	Wahr [1983]	Eubanks [1993]	Dobslaw et al. [2010]	本文理论
T^L	1.00	1.12	1.098	1.1205	频率的函数
T^{NL}	1.43	1.61	1.5913	1.6169	频率的函数
k	0.29	0.29	0.298	0.295	频率的函数
k'	-0.30	-0.31	-0.310	-0.310	频率的函数
$C - A$ (kg m ² /s)	2.614×10^{35}	2.610×10^{35}	2.610×10^{35}	2.6398×10^{35}	2.63096×10^{35}
$C_m - A_m$ (kg m ² /s)	2.344×10^{35}	2.331×10^{35}	2.337×10^{35}	2.356×10^{35}	2.39075×10^{35}
e	3.254×10^{-3}	3.250×10^{-3}	3.258×10^{-3}	3.2958×10^{-3}	3.2845161×10^{-3}
目前 e 的最佳估值 (VLBI 拟合值)	$e = 3.2845479 \times 10^{-3}$ [Mathews et al., 2002]				
IERS Conventions (2010) 推荐的形变参数 (Love 数) 估值	$k = 0.29830$ (周日频段) $k = 0.3077$ (极潮频段)		$k' = -0.30808$ (周日频段)		

上述理论中, Eubanks [1993] 理论应用最广, 主要缺陷在于其动力学形状参数基本是“纯”理论的, 采用的地球模型与实际地球存在较大差异, 因此估值不很准确 (详细讨论可参见 Dehant et al. [1999] 及本文第二章), 特别是动力学扁率的估值与观测值存在巨大差异 (注意 Mathews et al. [2002] 对 e 的估值误差仅在最后三位甚至更少); Barnes et al. [1983] 和 Wahr [1983] 理论较老, 参数精度不足, 故不多加讨论; Dobslaw et al. [2010] 理论尽管采用了较新参数, 但其采用的 A, C 值和 A_m, C_m 值在理论上不相匹配, 推算出的 e 值也存在较大偏差; 本文理论的动力学形状参数和形变参数均基于最新的、自符合的相关模型 (主要来源于观测), 且本文 e 值在误差范围内也是与 VLBI 观测值相符的。

从 Love 数和转换函数数值方面来看, 传统理论显然是采用了周日频段的 Love 数来确定用于全频段的转换函数, 这显然是不合适的, 因为 Love 数随周期增长而增大 (例如, 相对于周日频段, k 在 Chandler 频段会增大约 20%, 在 0 频率时会等于长期 Love 数 $k_s \approx 0.94$)。实际上, 若采用 IERS Conventions (2010) 推荐的 Love 数值, 由式 (5.22) 可得

$$\begin{cases} T^L = 1.1163297, & T^{NL} = 1.6133798 & \text{周日频段} \\ T^L = 1.1329696, & T^{NL} = 1.6374286 & \text{极潮频段} \end{cases} \quad (5.27)$$

式 (5.27) 数值进一步表明, 传统地球自转理论确实只确定了地球的周日频段响应, 但却应用于研究长期极移。对比图 5.1 和式 (5.27), 可发现本文拟合的频率依赖转换函数是满足式 (5.27) 所加约束的。

综上所述, 本文理论从地球物理意义方面看也明显优于各种传统理论。

5.5 本章小结与讨论

本章基于改进的地幔滞弹性、周日与长期海潮模型，建立了极移激发过程中的频率依赖响应模型，从精度上改进了 Chen & Shen [2010a] 的频率依赖理论，确定了频率依赖的极移转换函数，并提供了显式表达式以便于应用。与传统理论相比，本章理论地球物理意义更为明确；在数值计算结果方面，本章理论在时域和频率均有更好表现 (Dobslaw et al. [2010] 理论与 Eubanks [1993] 理论的数值结果非常接近，故数值比较时仅展示了与 Eubanks [1993] 理论的比较结果)。本章理论相对于传统理论的改进是较为明显的，因此，在极移激发研究中有必要包含频率依赖响应的影响。

本章理论是开放性的，可容纳相关领域 (如地幔滞弹性、海潮模型等) 的新成果。若地幔滞弹性、海潮模型等得以改进，则可利用它们进一步提高频率转换函数的精度，从而提高有效激发的估算精度。类似于 Chen & Shen [2010a]，若将式 (5.1) 表示的频率依赖形变参数应用到式 (4.27)，则可得对应于三轴分层地球的极移转换函数和极移理论，但这样做会使计算变得复杂而其影响完全可以忽略 [参见图 4.3]。

尽管本章导出的频率依赖转换函数可应用于频率高至 1 cpd 的极移激发研究，但 IB 假设无疑阻碍我们获得如此高频率的有效地球物理激发。因此，后继任务将是克服 IB 假设，确定更符合实际的动力学气压计 (dynamic barometer) 模型。最近，Chao & Yan [2010] 和 Wilson & Chen [2010] 提出了相似的方法来考虑 non-IB 效应，特别是 Chao & Yan [2010] 提出的 IB-fraction 参数有可能推广而成为频率依赖的，这样就可以描述海平面对大气压高频变化的响应，进而估计出较为可靠的高频地球物理激发。

第六章 大气、海洋和陆地水对极移的激发作用

6.1 大气、海洋和陆地水数据的选取

在第四、五章中，本文以 NCEP 和 ECCO 发布的数据初步讨论了大气和海洋对极移的激发作用，以及地球三轴性和频率依赖响应性对极移激发的影响。实际上，为研究全球气候变化及固体地球与地表流体之间的相互作用，不同机构发布了不同的全球大气、海洋和陆地水模型，故可得到不同的大气、海洋和陆地水角动量 (AAM、OAM 和 HAM) 估计值。以下罗列了一些较为重要的模型：

1. NCEP/NCAR (National Centers for Environmental Prediction / National Center for Atmospheric Research) reanalyses: 发布大气和陆地水模型，可得到 AAM 和 HAM
2. ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) reanalyses: 发布大气、海洋和陆地水模型，可得到 AAM、OAM 和 HAM
3. JMA (Japan Meteorological Agency) products: 发布大气模型，可得到 AAM
4. UKMO (United Kingdom Meteorological Office) products: 发布大气模型，可得到 AAM
5. ECCO (Estimating the Circulation and Climate of the Ocean) Assimilation products: 发布海洋模型，可得到 OAM
6. GLDAS (Global Land Data Assimilation System) products: 发布陆地水模型，可得到 HAM

除大气、海洋外，近年来发现陆地水对极移激发也可能有重要作用。本章的主要目的之一就是定量研究大气、海洋和陆地水激发，并根据地球自转观测来比较检验各模型的可靠性和准确性；另一主要目的是进一步检验第五章建立的频率依赖响应模型。

需要指出，若要系统地研究大气、海洋和陆地水对极移的激发作用，在选取大气、海洋和陆地水模型时应考虑这些模型之间的相容性 (或一致性, consistency)。若海洋、陆地水循环模型 (分别记为 O 和 H) 由大气循环模型 (记为 A) 的输出驱动，则模型 A、O、H 即为相容的 [Brzezinski, 2011]。保证模型相容性是非常重要的，否则可能导致所确定的地球物理激发中含有虚假信号。

基于上述理由，本章仅选取如下四组相容模型：

NCEP AAM + ECCO OAM + NCEP HAM (since 1948)

ECMWF ERA40 AAM + OAM + HAM (1958 ~ 2001)

ECMWF ERAinterim AAM + OAM + HAM (since 1989)

ECMWF operational AAM + OAM + HAM (since 2000)

并采用反变气压计假设以联合考虑大气和海洋的影响 [Gross, 2010]。

6.2 大气、海洋和陆地水模型的初步检验

本小节将采用 IERS 最新发布的地球自转参数数据 EOP 08 C04 来检验地球物理流体模型的可靠性。基于误差理论，IERS 的 EOP 产品中心将 GNSS、VLBI、SLR 和 LLR 等独立解算的自转参数归算到最新的国际参考框架 ITRF2008 中，并进行插值、平滑等，最终取加权平均得到每天采样

的 EOP 08 C04 时间序列。此处参与检验的地球物理流体数据有：

1. NCEP reanalysis AAM + ECCO kf080 OAM + NCEP reanalysis / GLDAS HAM
2. ECMWF ERA40 (1993 ~ 2001) plus ECMWF operational (2002 ~ 2008) AAM + OAM + HAM

由于 ERAinterim 与 ERA40、ECMWF operational 数据差异不是很大，故此处暂不考虑。不过，作为进一步的模型检验，6.3 节将用到 ERAinterim 模型。本小节所用数据均始于 1993 年 1 月 1 日，止于 2008 年 12 月 31 日。

首先在时域中考察上述两组流体模型之间的差异。图 6.1—6.3 分别比较了大气、海洋和陆地水的物质项和运动项（陆地水的运动项量级不到质量项的 1%，故予以忽略）。由图可知，大气的物质项模型最为准确（表现为不同模型的估计值相当符合），而运动项模型次之；海洋模型再次之；陆地水模型不确定度最高，不同模型之间几乎没有一致性。特别地，对于同一陆地水模型 GLDAS，本文估值（图 6.3 红线）与闫昊明 [2011] 提供的（图 6.3 浅蓝线）也显著不同。图 6.4 比较了扣除大气、海洋和陆地水贡献（基于不同模型的估计值）的观测激发残差。由图 6.4 可知，该残差振幅约 40—60 mas；如此大的残差表明地球物理流体模型仍需要较大的改进。

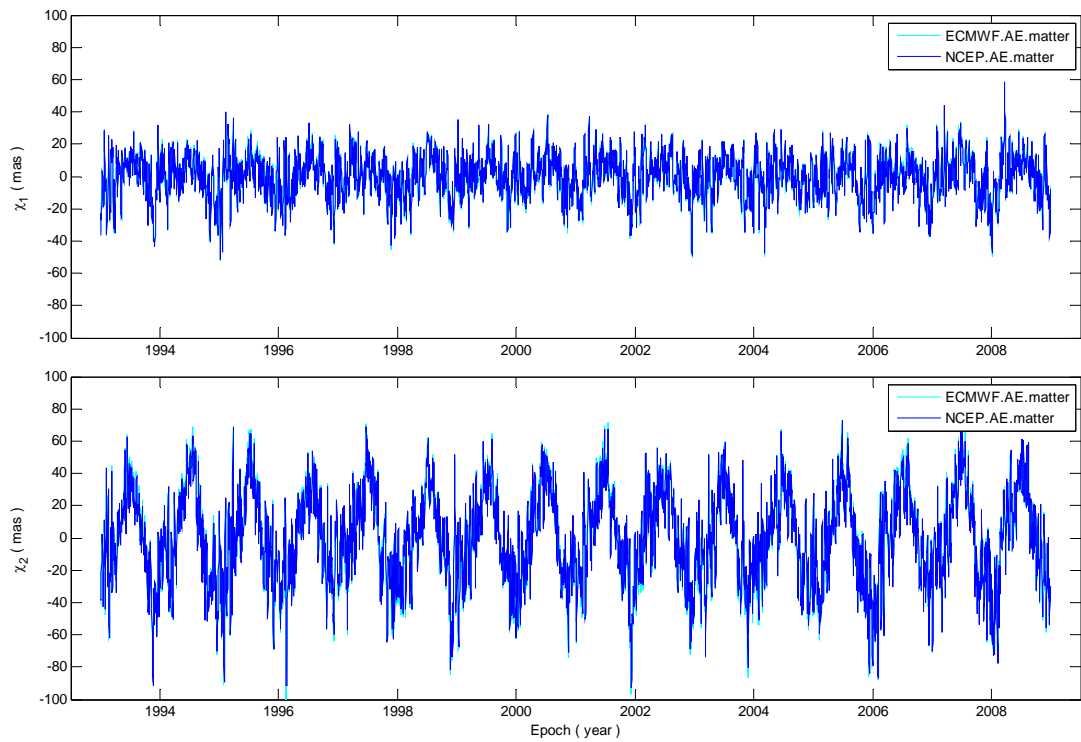
鉴于陆地水模型很不可靠，图 6.5 比较了陆地水激发的贡献。由图 6.5 可知，在大气、海洋激发的基础上增加陆地水激发可带来些微改进（在时域中）。

再转到频域中对各模型之间及模型与观测之间进行比较。根据图 6.6 和 6.7，在低频段，大气、海洋激发之和与观测激发较为接近，在高频段则差异较大；加入陆地水激发（特别是 ECMWF 和 GLDAS 模型）会引入较大的甚低频异常（周期约 2 年或更长，本文称之为长期偏差，long-period bias）。这表明大气、海洋模型在季节性尺度上精度较高，在较短时间尺度（主要是一周以内）上较差，而陆地水模型基本不能给出可靠结果。这一点从图 6.8 的符合度比较也可看出：大气、海洋激发与观测激发之间存在较好的符合度（主要在低频段），加入陆地水激发后低频段的符合度反而会降低（图 6.8a, b）；若采用滤波器滤去该长期偏差，符合度有所提高，但仍略低于只考虑大气、海洋激发的符合度（图 6.8c）。

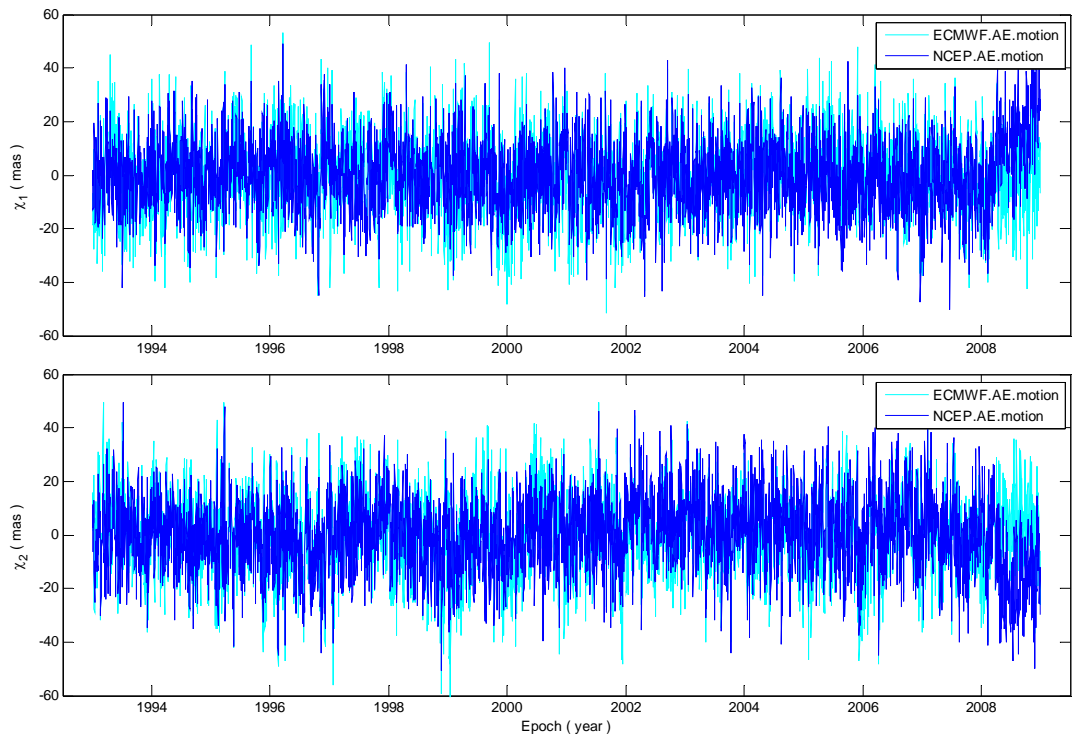
Ray & van Dam [2011] 在比较 GLDAS 地表负荷数据和全球 GPS 台站坐标时，也发现 GLDAS 模型存在长期的系统性误差。他们与 GLDAS 的发布者之一 Matt Rodell 讨论过，但产生该系统性偏差的原因仍不太清楚，可能原因之一是：在生成陆地水数据时间序列的较长过程中，GLDAS 模型曾有过几次升级，导致不同时段内的数据不一致。最终，他们决定采用经验性的三次多项式来拟合 GLDAS 模型的长期偏差。这个事实也证实了本文的部分结论。

基于上述讨论，目前的陆地水模型还不太可靠，考虑陆地水模型反而使模型与实测的符合度降低。因此，本文后续研究将主要采用大气、海洋模型，只在必要时考虑陆地水的作用。

另一方面，由图 6.6 和 6.7 可知，第一组模型（NCEP reanalysis AAM + ECCO kf080 OAM）得出的周年信号要弱于观测激发，而第二组模型（ECMWF ERA40 (1993—2001) plus ECMWF operational (2002—2008) AAM + OAM）的周年信号则过强；两组模型在不同频段上与观测激发符合较好，没有哪组模型具有绝对优势。具体地说，第二组模型高估了某些频段的大气、海洋变化，而第一组模型则估计不足；若能联合多组模型求解，可能会给出与观测激发更为符合的结果。



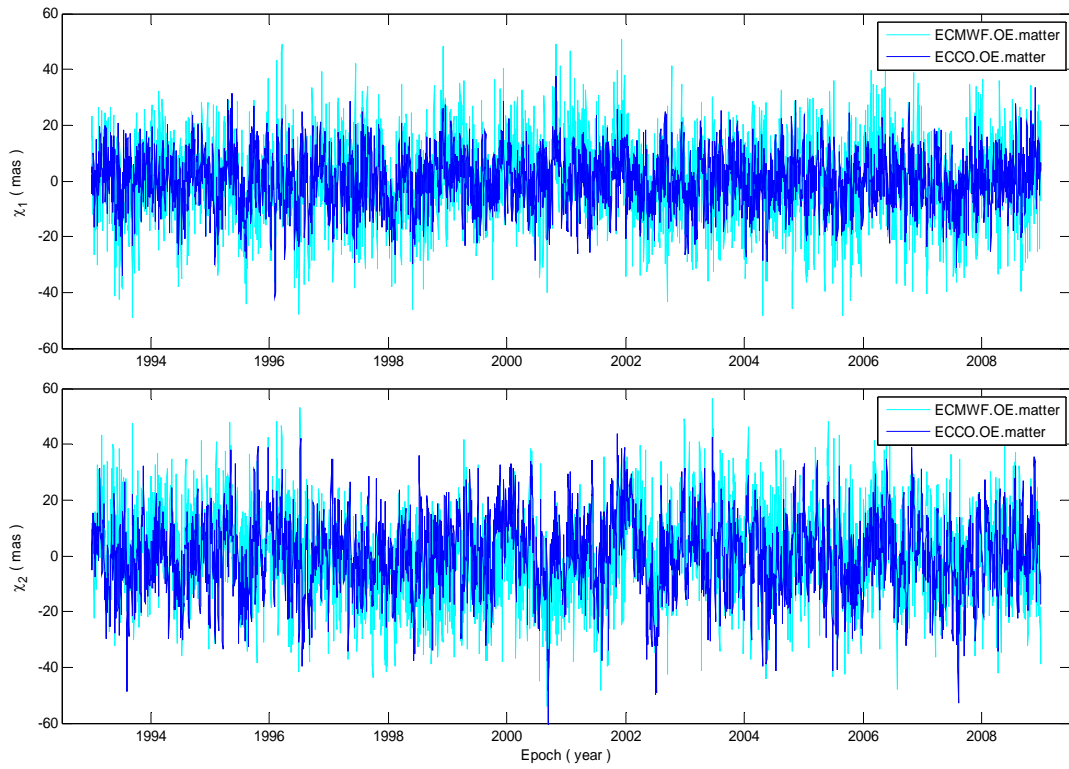
(a)



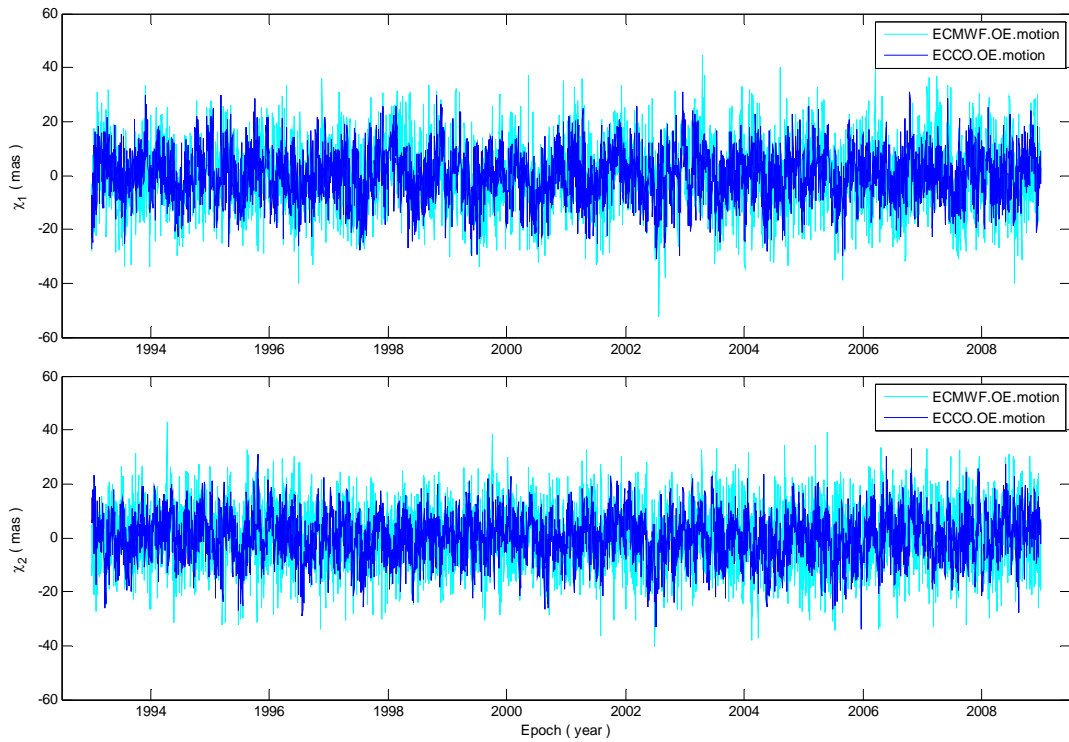
(b)

图 6.1 两组模型导出的大气角动量物质项 (a) 和运动项 (b) 的比较

Fig.6.1 Comparison of the AAM matter terms (a) and motion terms (b) derived from two model sets



(a)



(b)

图 6.2 两组模型导出的海洋角动量物质项 (a) 和运动项 (b) 的比较

Fig.6.2 Comparison of the OAM matter terms (a) and motion terms (b) derived from two model sets

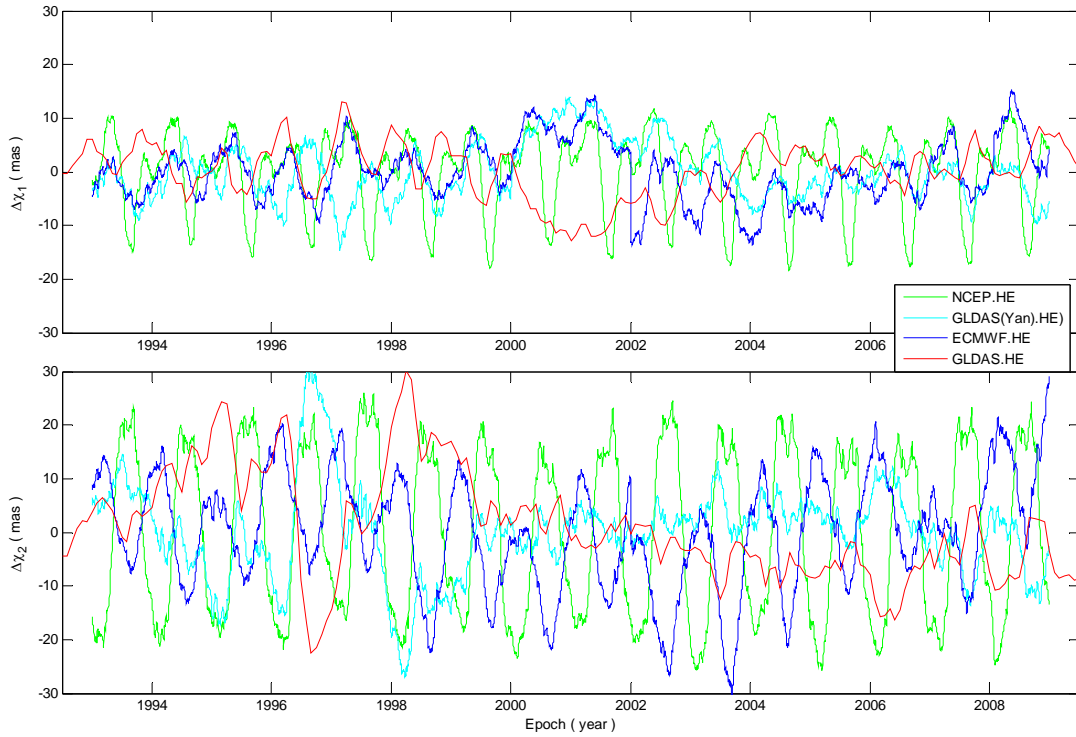


图 6.3 不同模型导出的陆地水角动量的物质项比较

Fig.6.3 Comparison of the HAM matter terms derived from different models

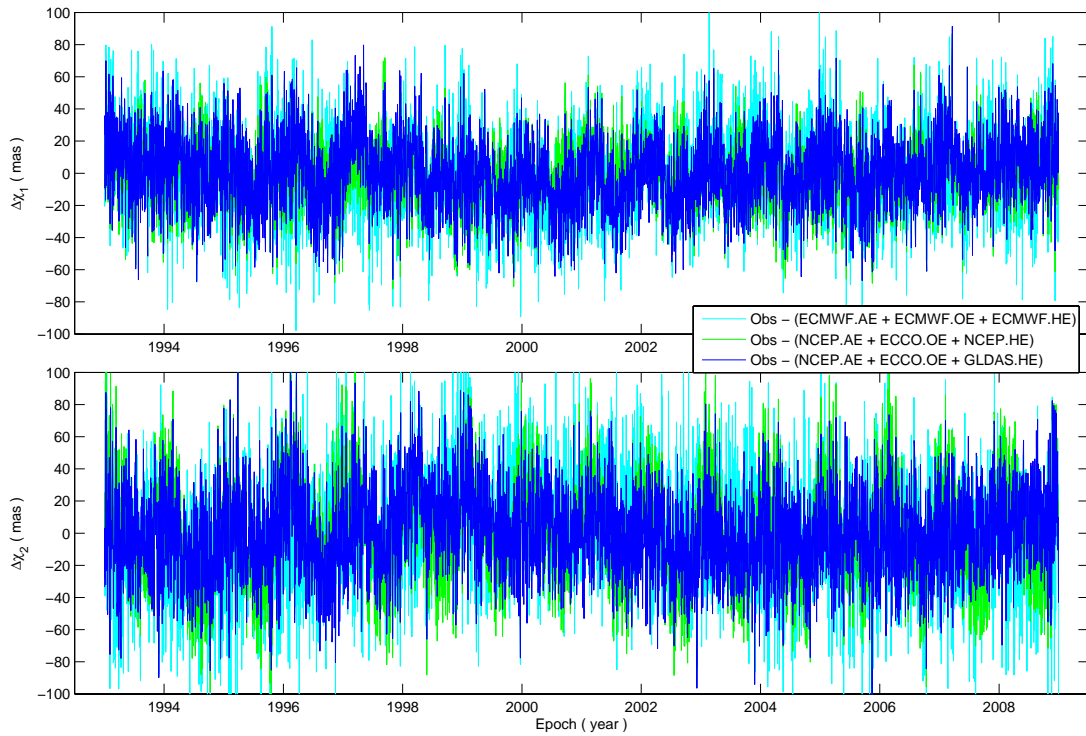
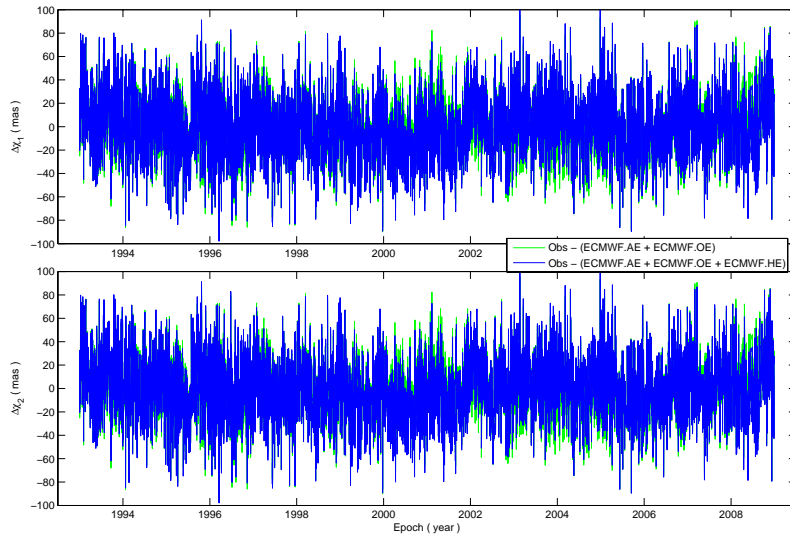
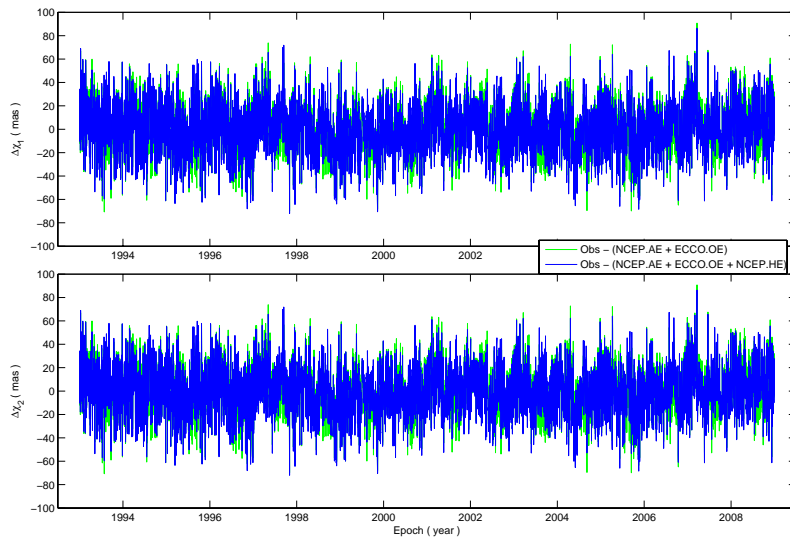


图 6.4 扣除大气、海洋和陆地水贡献的观测激发残差

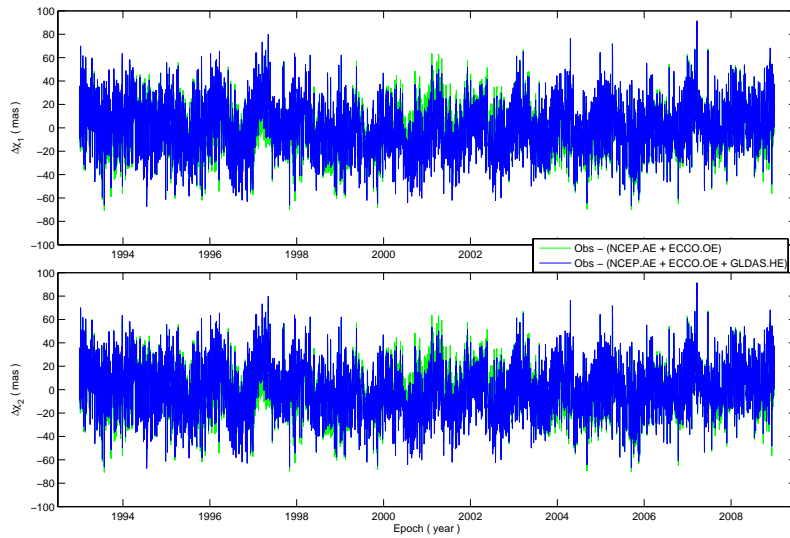
Fig.6.4 Geodetic excitations after deducting the atmospheric, oceanic and hydrological contributions



(a)



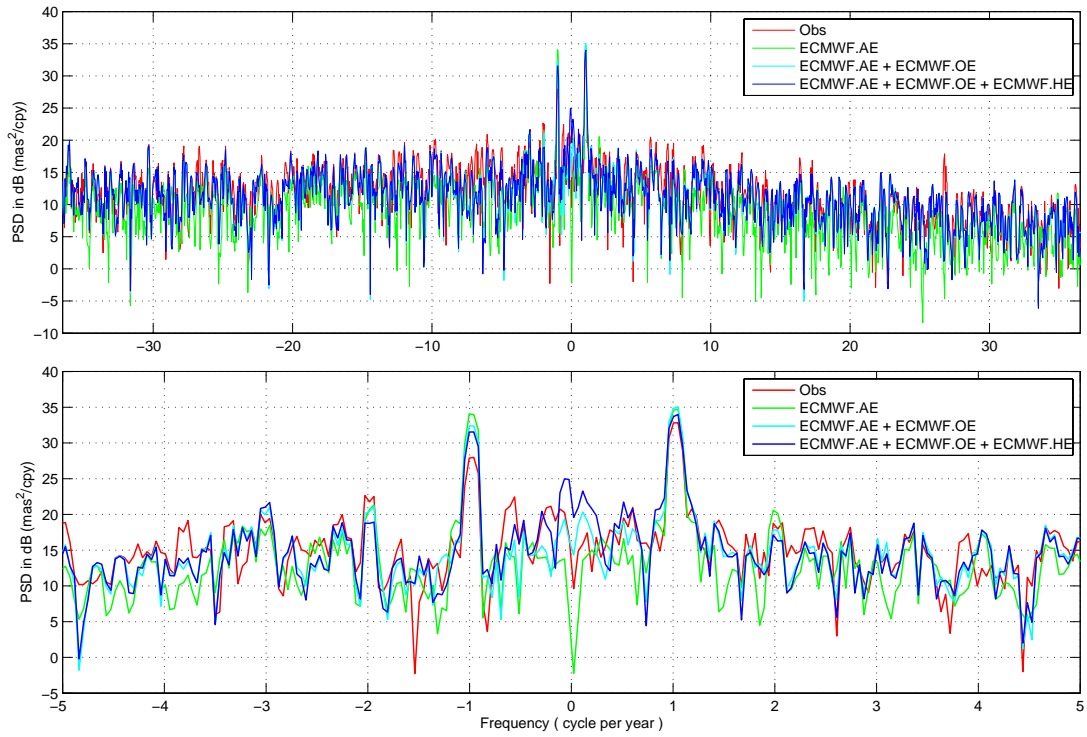
(b)



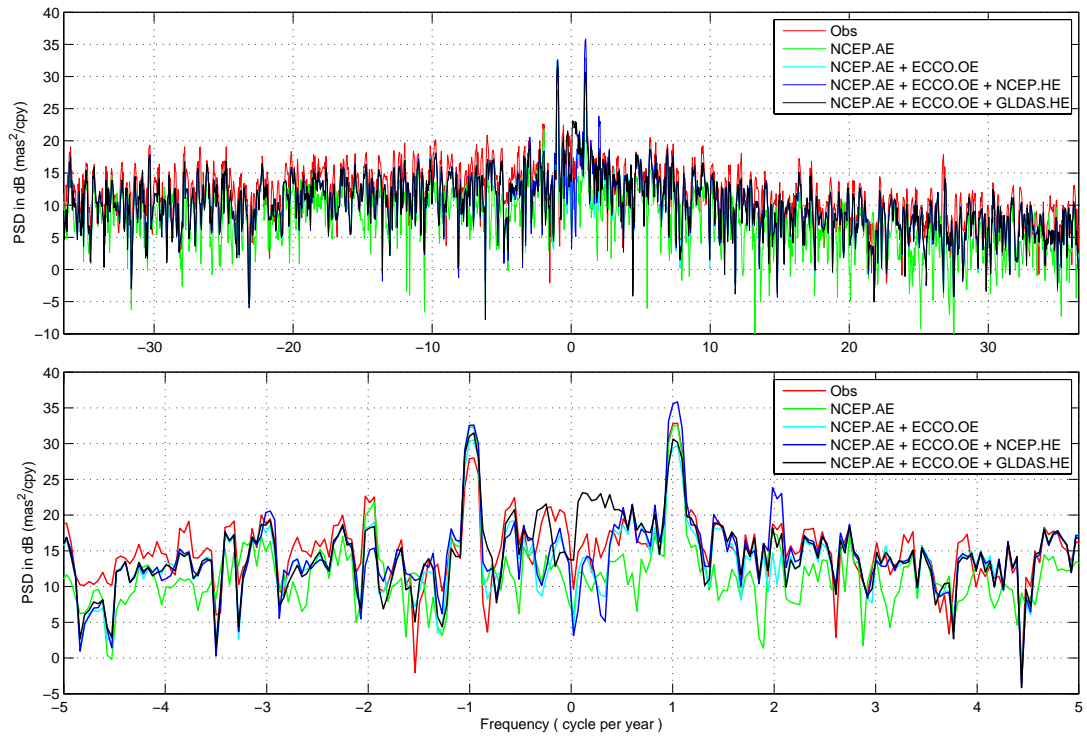
(c)

图 6.5 陆地水激发对观测激发残差的影响: (a) ECMWF; (b) NCEP; (c) GLDAS

Fig.6.5 Influences of hydrological excitations on the geodetic excitation residuals: (a) ECMWF; (b) NCEP; (c) GLDAS

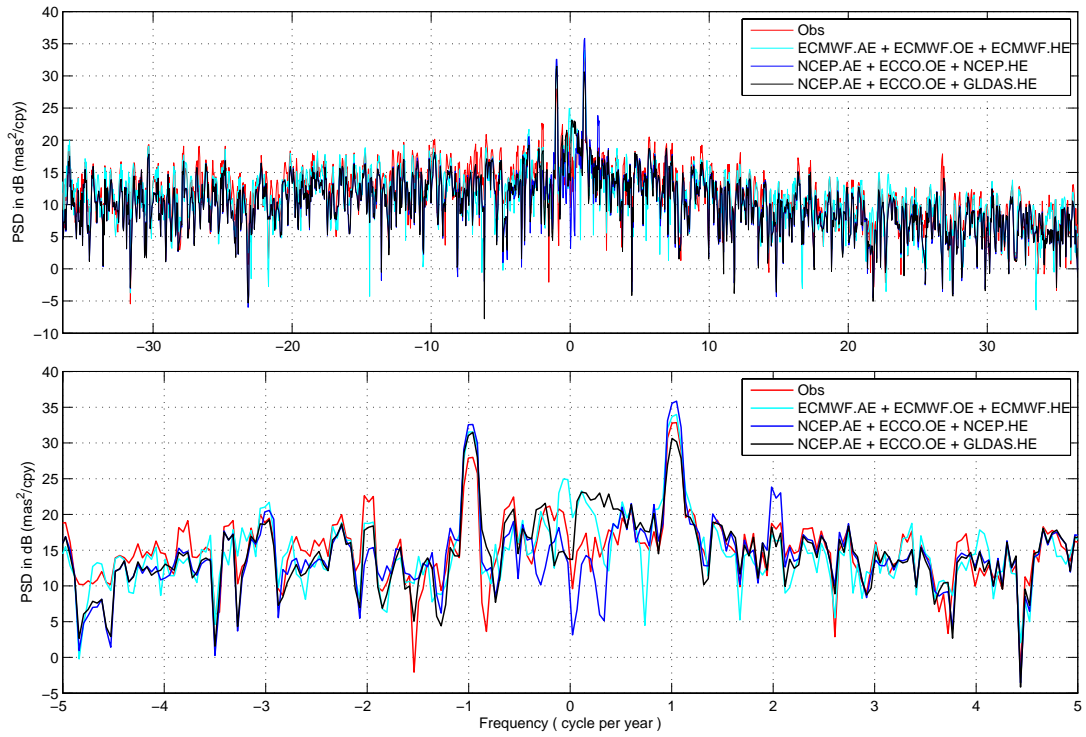


(a)

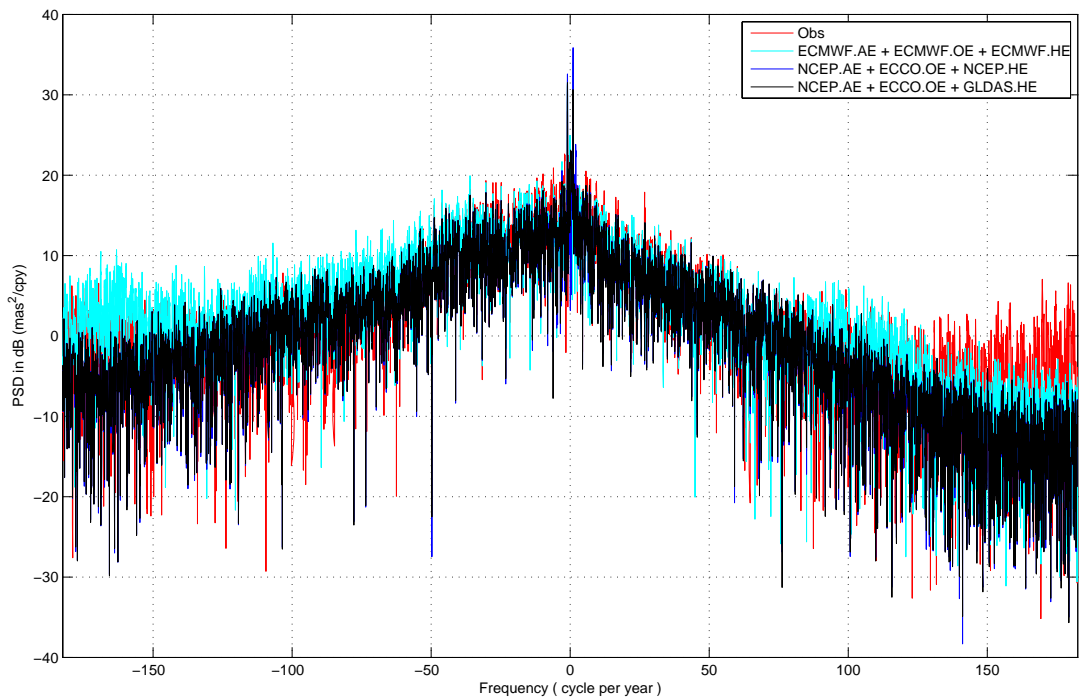


(b)

图 6.6 地球物理激发与观测激发的功率谱比较：基于不同模型的大气、海洋、陆地水对极移激发的贡献
Fig.6.6 PSD Comparisons of the geodetic excitation and the geophysical excitations: Contributions of the atmospheric, ocean and hydrology to polar motion excitations on the basis of various model sets



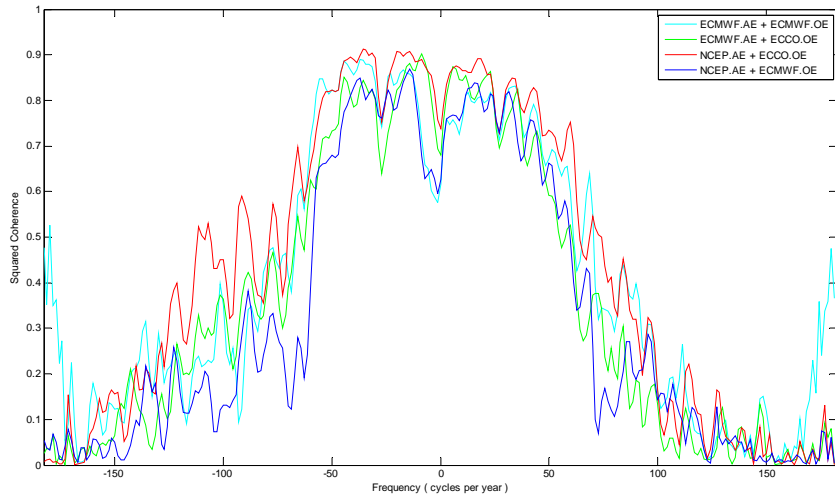
(a)



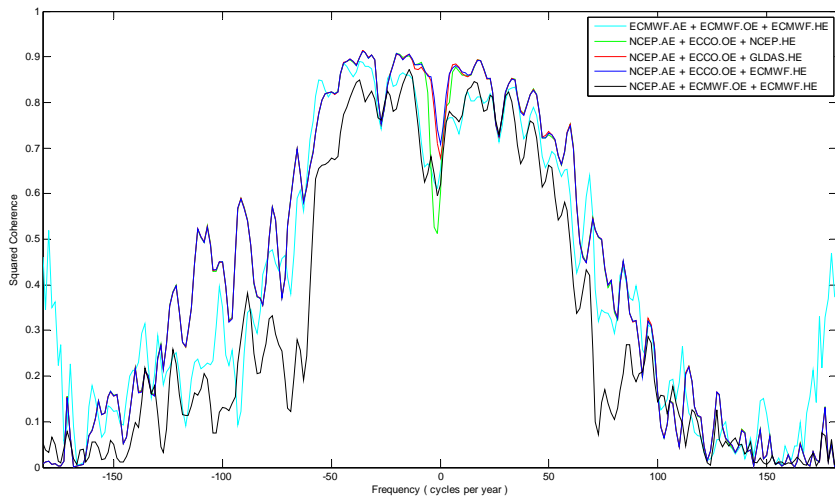
(b)

图 6.7 地球物理激发与观测激发的功率谱比较：不同模型在低频段和全频段的对比

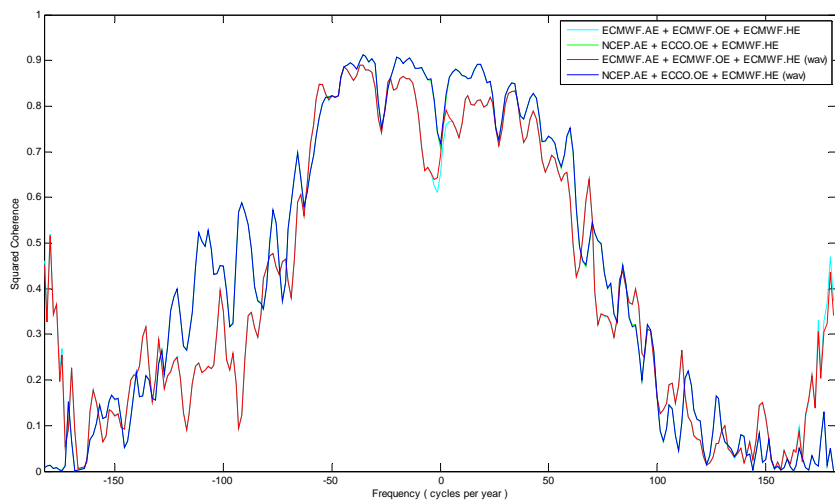
Fig.6.7 PSD Comparisons of the geodetic excitation and the geophysical excitations: Comparisons of various model sets in the lower- and full-frequency bands



(a)



(b)



(c)

图 6.8 地球物理激发与观测激发的符合度比较: (a) 无陆地水; (b) 有陆地水; (c) 去偏差的陆地水
Fig.6.8 Coherence comparisons of the geodetic excitation and the geophysical excitations: (a) no hydrology;
 (b) with hydrology; (c) de-biased hydrology

6.3 大气、海洋模型的改进及其检验

在 6.2 节基础上, 本小节将改用 IGS (International GNSS Service) 发布的地球自转参数数据进一步检验地球物理流体模型的可靠性, 同时将采用一种“最小差异法”得到一组合成的大气、海洋激发数据。

IGS 共发布三种产品 [Ray, 2009]: Ultra-rapid (实时, 6 小时采样, 称为 igt)、Rapid (约 1、2 天延时, 1 天采样, 称为 igr) 和 Final (约 2 周延时, 1 天采样, 称为 igs), 它们精度依次递增。此外, IGS 实施的第一次数据重处理计划 (1st IGS Reprocessing Campaign) 将 Final 数据归算到同一参考框架 ITRF2005 中 (在 IGS 产品的发布中, 国际参考框架曾多次变动), 使数据具有更好的一致性, 该数据记为 ig1。鉴于 IGS 数据的复杂性, Jim Ray 教授 [2011] 专门为本研究解算了一套新数据: ig1+igs+igt.erp (以下简称 IGS 数据), 它具有 ig1 和 igs 的高精度, 同时还具有 igt 的高采样率 (2004—2010, 6 小时采样)。

本小节将利用 IGS 数据检验如下地球物理流体模型 (所有数据均为 6 小时采样, 时间跨度为 2004—2010; ECCO kf080 OAM 原为天采样, 通过线性内插为 6 小时采样):

1. NCEP reanalysis AAM + ECCO kf080 OAM
2. ECMWF operational AAM + OAM
3. ERAinterim AAM + OAM
4. COMB combined AAM + OAM

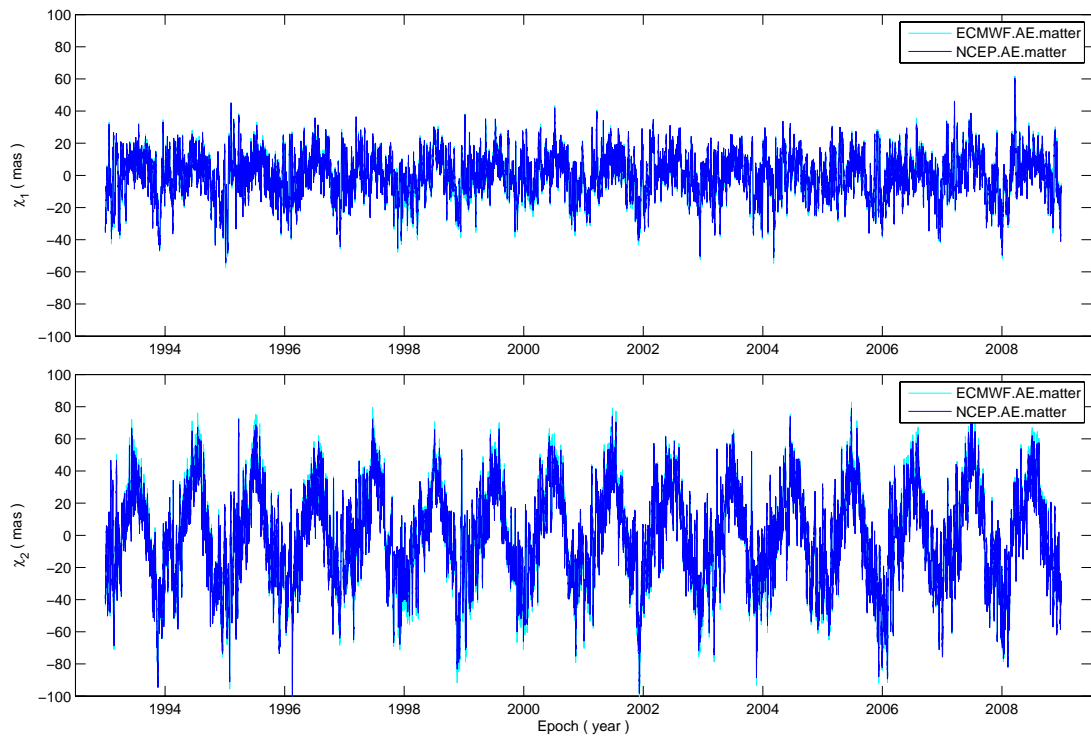
其中, COMB 是联合前三组模型利用“最小差异法”得到的: 本文认为符合观测值的模型值是合理的, 因此可逐点选取三组数据中与观测激发在振幅和相位上最为接近的点 (即差异最小), 这些点即构成一组新数据 COMB。

仍从时域开始对上述流体模型进行比较。图 6.9 和 6.10 分别比较了 1、2 组模型 (这两组模型已具有足够的代表性) 的大气、海洋的物质项和运动项。由图 6.9 和 6.10 可知, 对于 6 小时采样数据, 两组模型的大气物质项和运动项仍符合较好, 海洋物质项和运动项则表现出较大差异, 这与图 6.2 天采样数据的较小差异存在着反差。图 6.2 和 6.10 的反差可解释如下: 海洋物质项和运动项含有丰富的高频成分, 仅采用天采样数据是无法描述的; ECMWF 的海洋模型本身就提供了 6 小时采样的输出数据, 而 ECCO 模型仅给出天采样的输出 (注意内插并不能给出真实意义上的高频成分)。因此, 海洋模型如 ECCO 等应提供更高采样率的数据以解释高频极移激发。

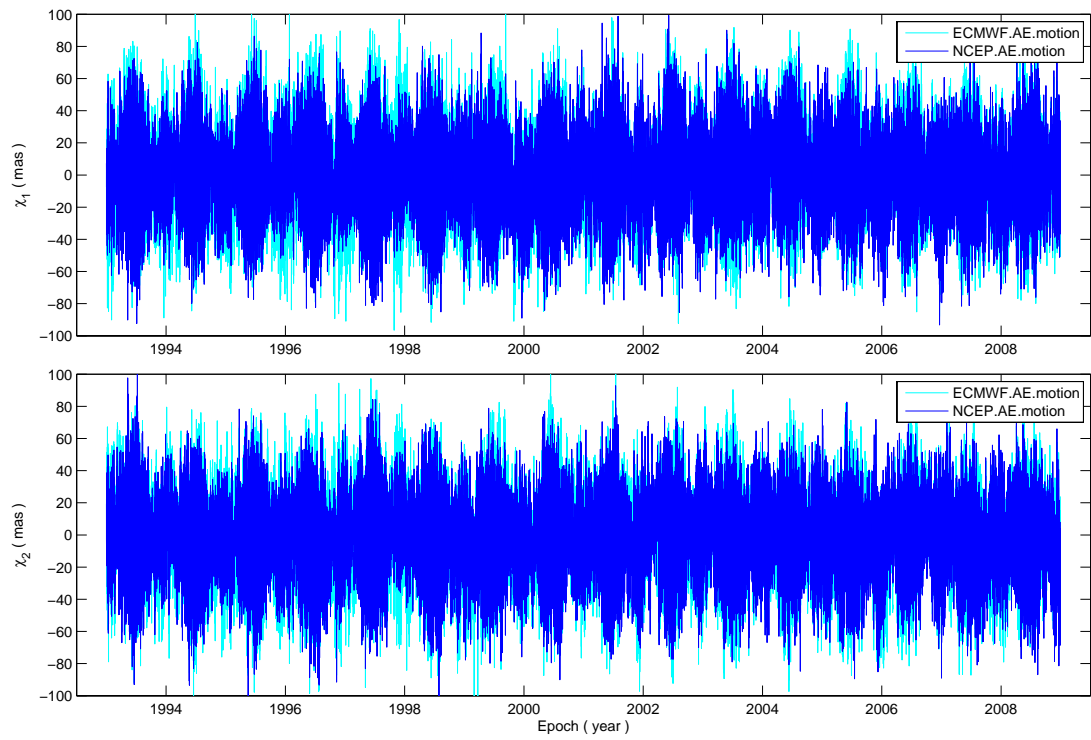
图 6.11 和 6.12 进一步比较了所有四组模型, 可知联合模型 COMB 与其它模型在时域内符合较好。值得指出, 总体上, ECMWF 海洋物质项和运动项振幅偏大, ECCO 振幅偏小, 而 COMB 振幅介于两者之间。图 6.13 比较了对应于四组模型的观测激发残差, 对应于 COMB 的残差略小于对应于其它模型的残差。

再转到频域中对各模型之间及模型与观测之间进行比较。由图 6.14 可知, 基于 COMB 模型的大气、海洋激发之和与观测激发的功率谱密度最为接近。图 6.15 则表明, COMB 模型集成了其它三组模型的优点, 在较宽频段上与观测激发具有最好的符合度, 而其它模型仅在部分较窄频段上有较好表现。

基于上述时域、频域和符合度分析, 可认为本文得到的联合模型 COMB 是最优的。



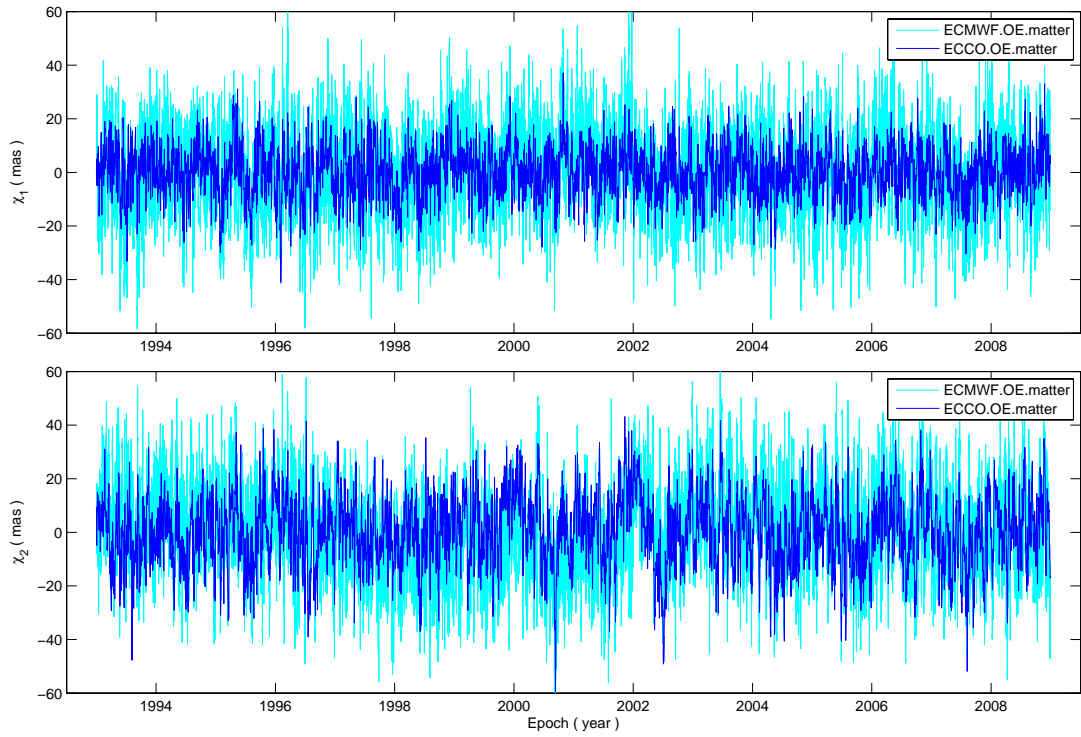
(a)



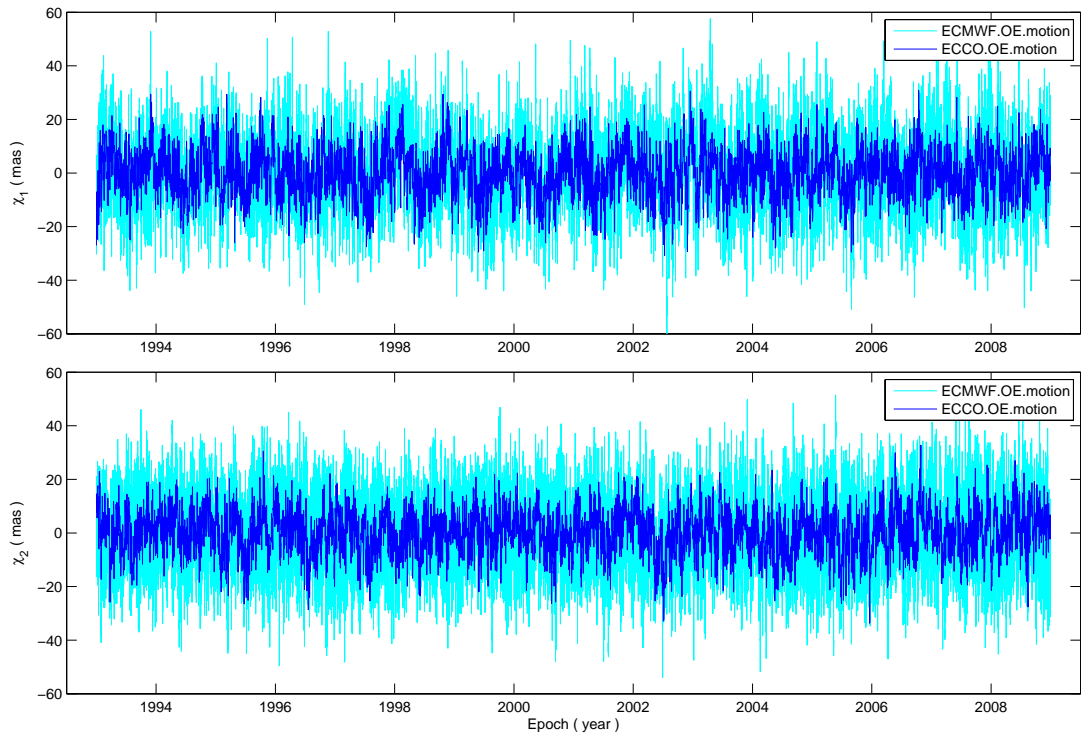
(b)

图 6.9 两组模型导出的大气角动量物质项 (a) 和运动项 (b) 的比较

Fig.6.9 Comparison of the AAM matter terms (a) and motion terms (b) derived from two model sets



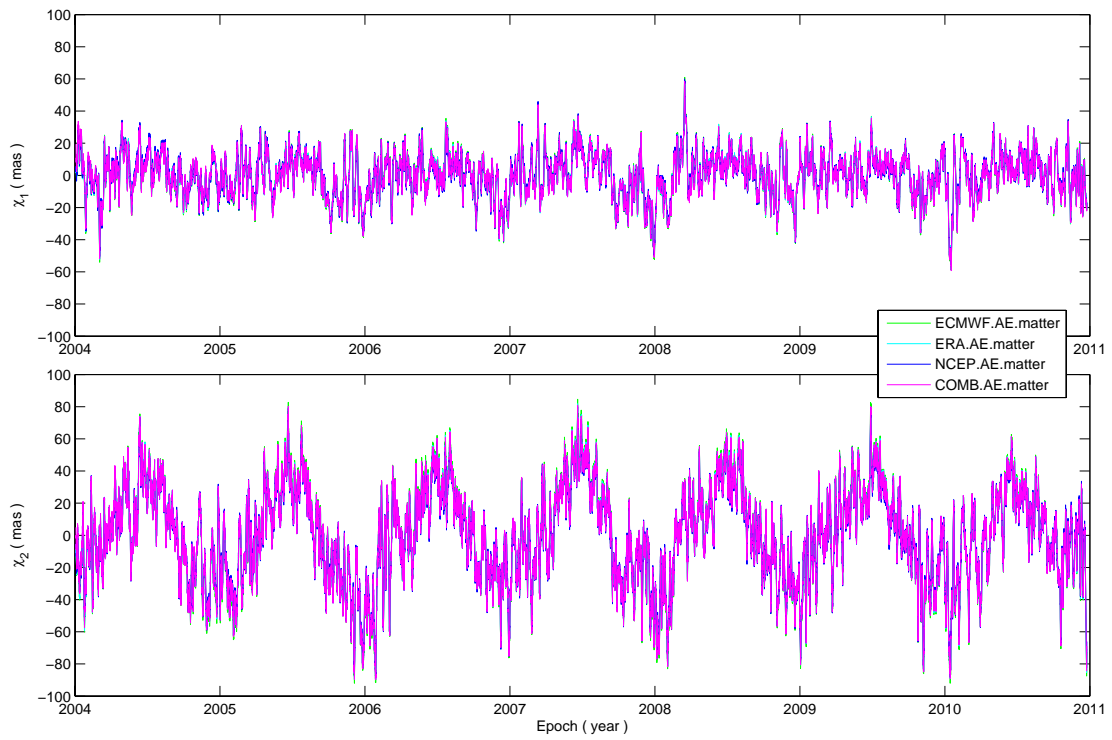
(a)



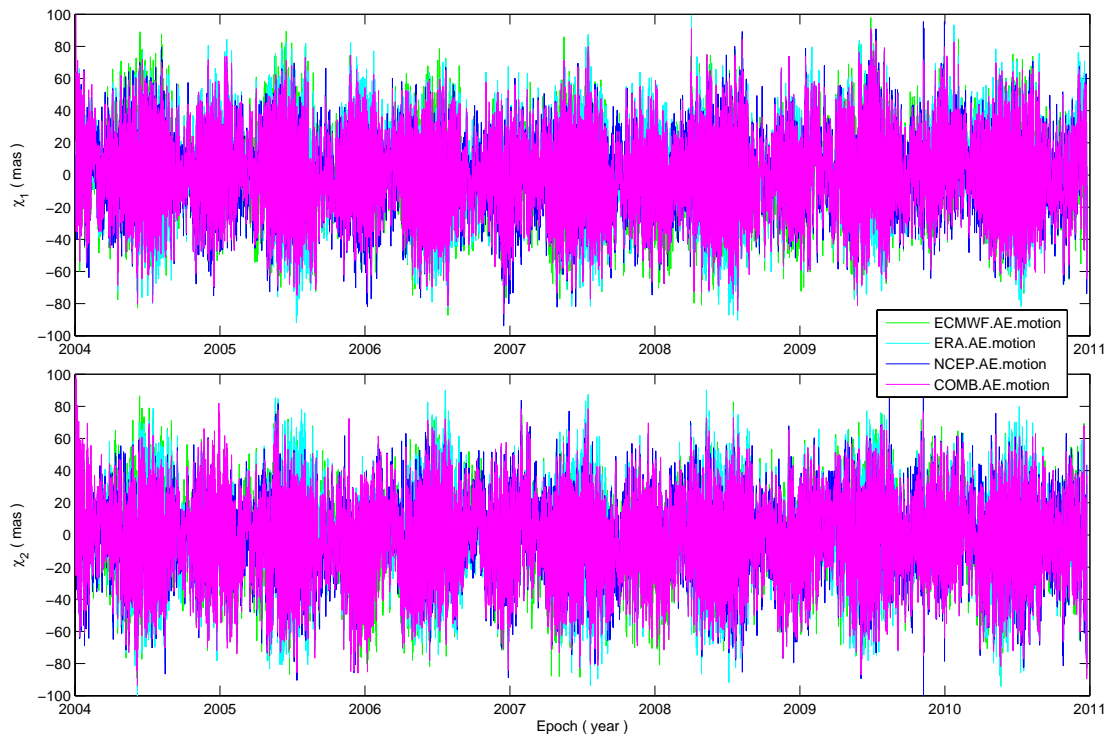
(b)

图 6.10 两组模型导出的海洋角动量物质项 (a) 和运动项 (b) 的比较

Fig.6.10 Comparison of the OAM matter terms (a) and motion terms (b) derived from two model sets



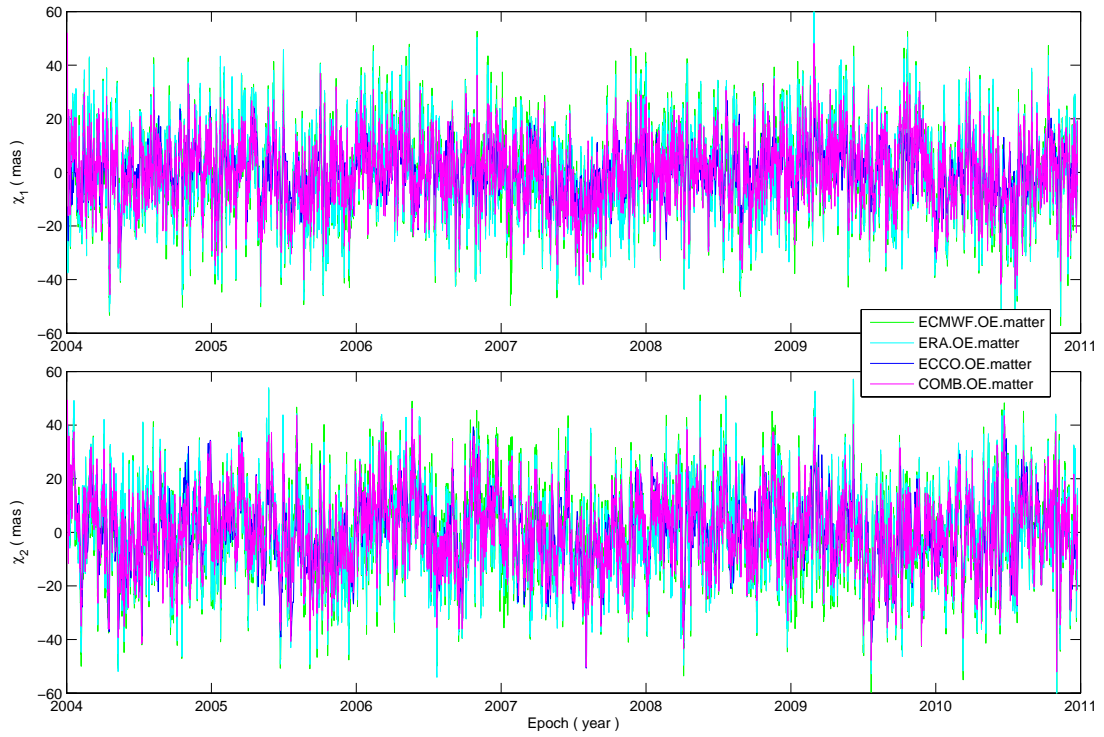
(a)



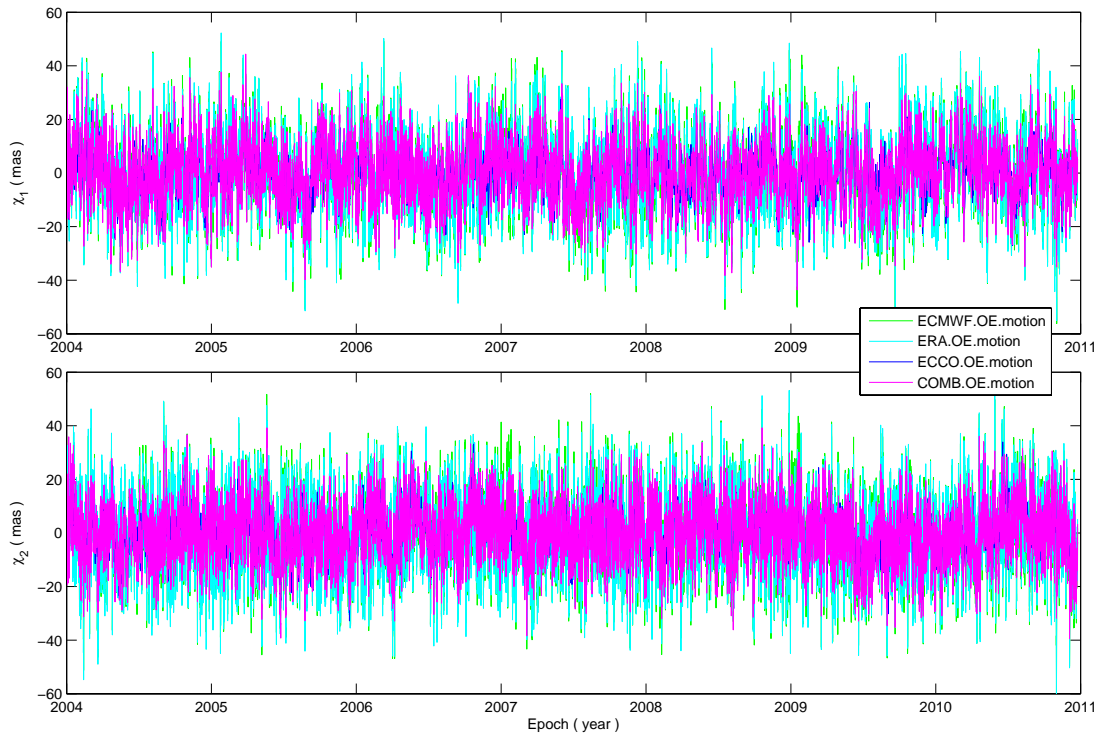
(b)

图 6.11 四组模型导出的大气角动量物质项 (a) 和运动项 (b) 的比较

Fig.6.11 Comparison of the AAM matter terms (a) and motion terms (b) derived from four model sets



(a)



(b)

图 6.12 四组模型导出的海洋角动量物质项 (a) 和运动项 (b) 的比较

Fig.6.12 Comparison of the OAM matter terms (a) and motion terms (b) derived from four model sets

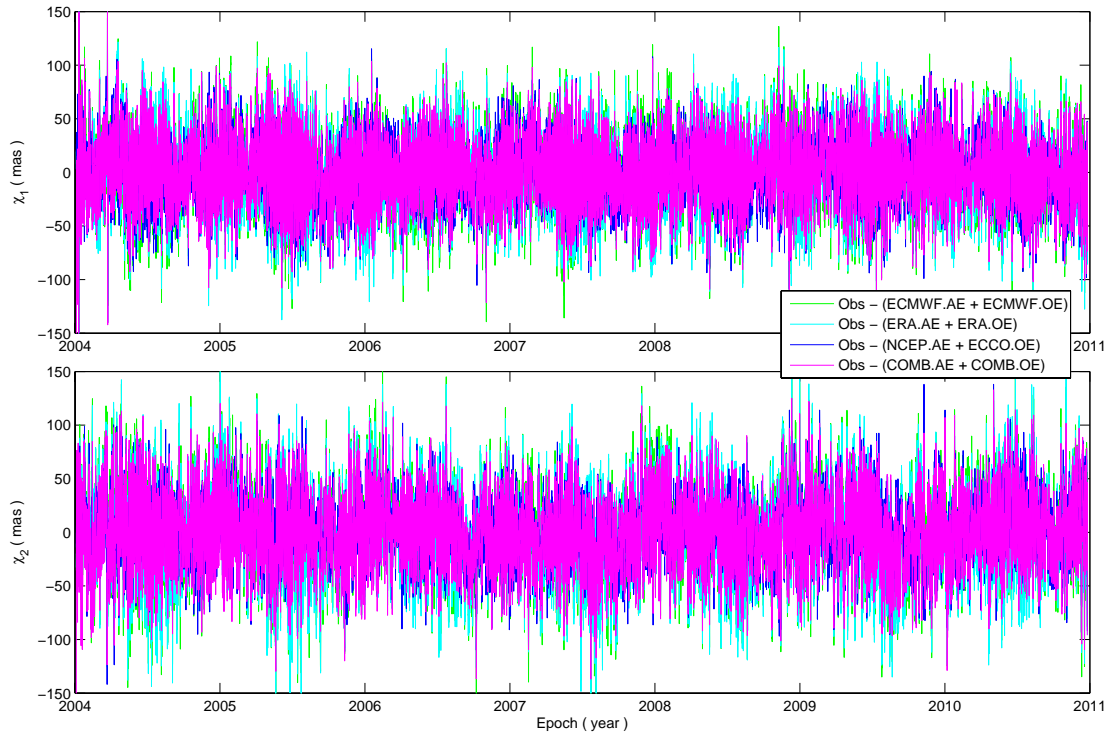


图 6.13 扣除大气、海洋和陆地水贡献的观测激发残差 (四组模型)

Fig.6.13 Geodetic excitations after deducting the atmospheric, oceanic and hydrological contributions (for four model sets)

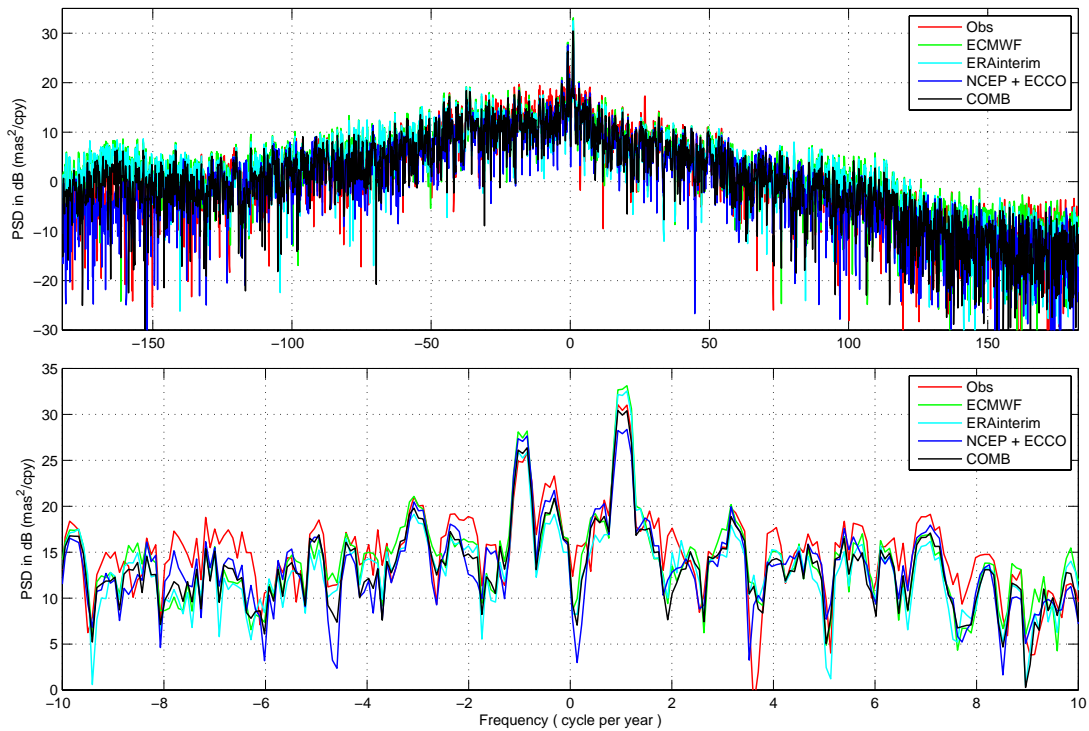


图 6.14 地球物理激发与观测激发的功率谱比较

Fig.6.14 PSD Comparisons of the geodetic excitation and the geophysical excitations

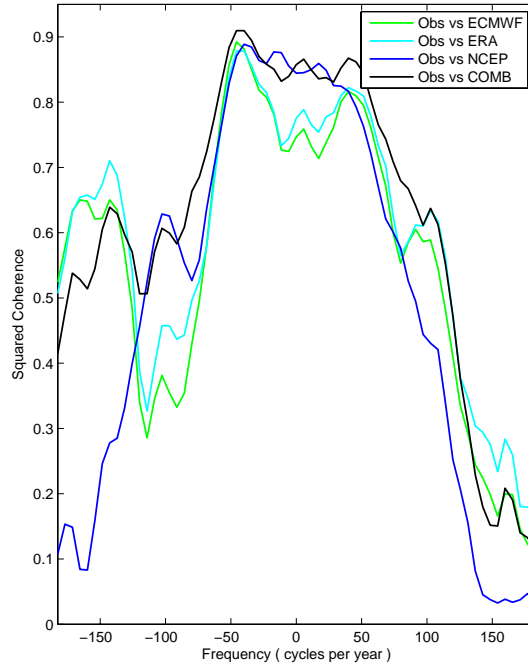


图 6.15 地球物理激发与观测激发的符合度比较

Fig.6.15 Coherence comparisons of the geodetic excitation and the geophysical excitations

表 6.1 观测激发与地球物理激发的周年项比较

Table 6.1 Comparisons of the annual components of the geodetic and the geophysical excitations

		A_p (mas)	α_p (deg)	A_r (mas)	α_r (deg)
χ_{OBS}		19.0226	-63.3790	9.3598	-133.9719
χ_{ECMWFop}	AO	23.9337	-83.0622	13.7742	-106.5324
	AOH	21.4724	-76.9744	11.7103	-138.2239
$\chi_{\text{ERAinterim}}$	AO	22.4928	-69.4843	10.7753	-101.0856
	AOH	21.4901	-59.8073	8.7894	-144.5591
χ_{NCEPECCO}	AO	13.8265	-76.1883	12.6009	-119.2213
	AOH	12.5831	-60.3468	12.5226	-153.8468
χ_{COMB}	AO	17.5084	-66.8232	10.9434	-106.0416
	AOH	16.4714	-55.4271	9.4278	-148.6883
$\chi_{\text{FDR-COMB}}$	AO	21.9196	-66.4104	11.0747	-106.7601
	AOH	20.7431	-54.6075	9.7328	-149.6897

对于极移激发的主要成分周年项 $p = A_p \exp[i(\sigma t + \alpha_p)] + A_r \exp[i(-\sigma t + \alpha_r)]$ ，本文表 6.1 给出了对应于观测激发和地球物理激发的最小二乘估值 (2004—2010 年的平均值)。其中，符号 AO 表示考

考虑大气、海洋激发效应，AOH 则进一步加入了陆地水的影响。由表 6.1 可知，尽管陆地水激发不确定性非常大，但目前的陆地水模型（特别是 ERAinterim 模型，COMB 模型与之非常接近）对周年水变化的估计还是较为准确的。这表现在，加入陆地水激发后，地球物理激发与观测激发更为接近（对大部分模型而言）。

基于 COMB 模型，同时采用第五章图 5.1 所示的频率依赖的转换函数，可得顾及地球频率依赖响应的地球物理激发 $\chi_{\text{FDR-COMB}}$ 。比较表 6.1 所列各种模型的估值，可知 $\chi_{\text{FDR-COMB}}$ 与观测激发 χ_{OBS} 最为接近，这再次证实了本文给出的频率依赖转换函数的优越性。

6.4 高频观测激发的计算与检验

Chen & Shen [2010a; 2011] 在利用 EOP-PC 网页工具 (<http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/>) 生成的数据比较观测激发与地球物理激发时，发现观测激发序列在较高频段处（约从 50 cpy 开始）相对于地球物理激发存在着明显的功率不足（本文称为功率损失 power loss，参见图 6.16a 浅蓝线）。该功率损失的根源可能在于：

- A. IERS EOP C04 极移数据平滑过度，导致较高频信号损失；
- B. 由极移数据计算观测激发的方法存在丢失较高频信号的缺陷；
- C. 地球物理流体模型在较高频段上噪音水平太高。

如果原因 C 成立，则不是观测激发功率不足，反而是地球物理激发功率过剩。可见，研究观测激发较高频成分的可靠性具有重要意义，它可同时检验极移数据、地球物理流体模型的质量，以及计算观测激发方法的准确性。

为达到上述目的，本节将采用不同机构发布的多种极移数据：

1. EOP 08 C04 (midnight, IERS 发布)
2. EOP 08 C04R (0, 6, 12, 18h, 由 IERS EOP 08 C04 线性内插得到)
3. IGS EOP ig1+igs+igu (0, 6, 12, 18h, Jim Ray 教授提供)
4. SPACE2009 + JPL operational (midnight / noon, JPL 发布)

目前，计算观测激发时广泛采用 Wilson [1985] 导出的滤波器，其公式为

$$\chi_t = \frac{i \exp(-i\pi F_C T)}{\sigma_c T} \left[p_{t+T/2} - \exp(i\sigma_c T) p_{t-T/2} \right] \quad (6.1)$$

其中 $\sigma_c = 2\pi F_C (1+i/2Q_C)$ 为 Chandler 频率， Q_C 为品质因子， T 为数据采样间隔。式 (6.1) 将给出相邻数据点中间时刻的观测激发，若需要与数据点相同时刻的观测激发，Wilson [1985] 假定

$$p_{t-T/2} = \frac{p_{t-T} + p_t}{2}, \quad p_{t+T/2} = \frac{p_t + p_{t+T}}{2} \quad (6.2)$$

将式 (6.2) 代入式 (6.1) 即可求得与数据点相同时刻的观测激发。值得指出，上述滤波器仅适用于计算周期大于约 10 天的观测激发，若要计算高频激发，需要对式 (6.1) 的输出结果再做一次滤波 [Wilson & Chen, 1996]:

$$\chi'_t = c_1 \exp(-i\sigma_c T) \chi_t + c_2 \chi_{t-T} + c_3 \exp(i\sigma_c T) \chi_{t-2T} + c_4 \exp(i\sigma_c T) \chi'_{t-T} \quad (6.3)$$

其中，

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0.9304 \\
c_2 &= 0.5024 \\
c_3 &= 0.01861 \\
c_4 &= -0.4541
\end{aligned} \tag{6.4}$$

式 (6.1) 对高频激发的功率估计偏高 2 到 4 个分贝 (dB)，而式 (6.3) 则可使该偏差降低到小于 0.1 dB [Wilson & Chen, 1996；他们将其命名为两级滤波法 (two stage filtering)]。除低频激发外，本文还将考虑极移激发的高频部分，因此，本文将采用两级滤波法计算观测激发。

以下将根据图 6.16 和 6.17 来讨论导致观测激发功率损失的三种可能原因。为简便起见，这里定义如下符号：

χ_{COMB}	根据 COMB 模型计算的地球物理激发
$\chi_{\text{C04}}^{\text{obs}}$	根据 EOP C04 数据计算的观测激发 (未采用式 (6.2))
$\chi_{\text{SPACE}}^{\text{obs}}$	根据 SPACE 数据计算的观测激发 (未采用式 (6.2))
$\bar{\chi}_{\text{C04}}^{\text{obs}}$	根据 EOP C04 数据计算的观测激发 (采用式 (6.2))
$\bar{\chi}_{\text{SPACE}}^{\text{obs}}$	根据 SPACE 数据计算的观测激发 (采用式 (6.2))
$\bar{\chi}_{\text{IGS}}^{\text{obs}}$	根据 IGS 数据计算的观测激发 (采用式 (6.2))
$\bar{\chi}_{\text{C04R}}^{\text{obs}}$	根据 EOP C04R 数据计算的观测激发 (采用式 (6.2))

也就是说，除图 6.16b 和 6.17b 中的 $\chi_{\text{C04}}^{\text{obs}}$ 和 $\chi_{\text{SPACE}}^{\text{obs}}$ 数据外，计算其它观测激发时均采用了式 (6.2)。

经过分析比较观测激发 $\bar{\chi}_{\text{C04}}^{\text{obs}}$ 和 $\bar{\chi}_{\text{C04R}}^{\text{obs}}$ ，可排除可能原因 A，理由如下：相对于 $\bar{\chi}_{\text{C04}}^{\text{obs}}$ ，线性内插后的 $\bar{\chi}_{\text{C04R}}^{\text{obs}}$ 的功率损失频段移到了更高频率处 (参见图 6.16a 和 6.17a)；如果 C04 平滑过度，C04R 的功率损失频段应基本不变 (注意线性内插并不增加有效频段宽度)。

再考察可能原因 B。相对于地球物理激发 χ_{COMB} 及观测激发 $\bar{\chi}_{\text{IGS}}^{\text{obs}}$ 、 $\bar{\chi}_{\text{C04R}}^{\text{obs}}$ ， $\bar{\chi}_{\text{C04}}^{\text{obs}}$ 和 $\bar{\chi}_{\text{SPACE}}^{\text{obs}}$ 观测激发在图 6.16a 和 6.17a 中均在较高频段表现出明显的功率缺失。这是因为式 (6.2) 相当于对相邻两数据点作了平滑，数据的有效采样率减半，从而数据的有效频段 (即与原始数据频率特性一致的频段) 在理论上也将减半。故图 6.16a 中的 $\bar{\chi}_{\text{C04}}^{\text{obs}}$ 表现出功率损失，而图 6.16b 中的 $\chi_{\text{C04}}^{\text{obs}}$ 则与 $\bar{\chi}_{\text{IGS}}^{\text{obs}}$ 、 $\bar{\chi}_{\text{C04R}}^{\text{obs}}$ 极为接近。在实际计算中，由于数据长度的影响 (注意，快速 Fourier 变换需要数据长度为 2^n ，我们通常需要对数据补零，使数据的高频谱产生一定程度的变化)，有效频段并不严格减半。例如，图 6.16a、b 中 $\chi_{\text{C04}}^{\text{obs}}$ 和 $\bar{\chi}_{\text{C04}}^{\text{obs}}$ (或 $\chi_{\text{SPACE}}^{\text{obs}}$ 和 $\bar{\chi}_{\text{SPACE}}^{\text{obs}}$) 的功率谱实际上在 ± 50 cpy (而不是减半频率 ± 90) 附近已出现差异。因此，是否采用式 (6.2) 对最终得到的高频观测激发具有重要影响。本文还发现采用式 (6.2) 导致的高频功率损失远超过式 (6.3) 的高频调整作用。

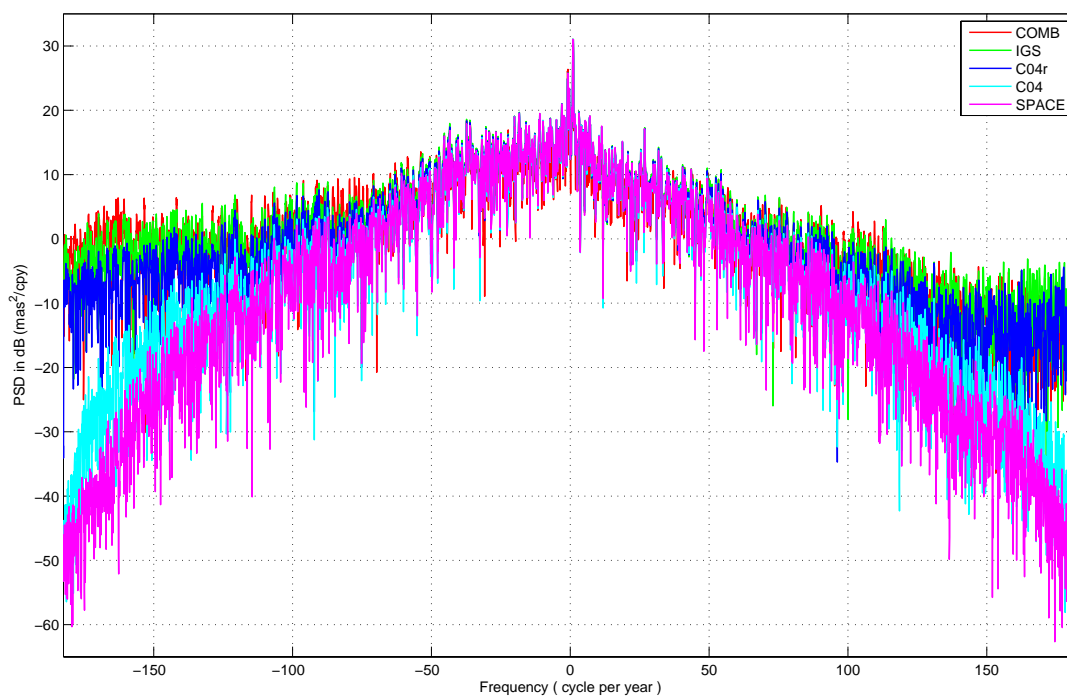
此外，经对比分析，本文确认 EOP-PC 网页工具采用式 (6.1) 和 (6.2) 来产生观测激发数据。因此，Chen & Shen [2010a] 采用该网页生成的数据出现高频功率损失是在所难免的。相对于 $\bar{\chi}_{\text{C04}}^{\text{obs}}$ ， $\bar{\chi}_{\text{C04R}}^{\text{obs}}$ 的良好表现说明适当插值可消除式 (6.2) 的平滑作用 (由于数据长度的影响，插值为原数据长度的 2 倍一般不够，建议插值为 4 倍长度，这样平滑作用将不会影响到原数据的有效频段)。因此，先插值再计算观测激发也是个不错的选择，但在分析结果时应排除因插值而增加的额外频段。

对于可能原因 C，由于地球物理流体模型导出的地球物理激发与正确计算的观测激发在频段 $[-182.5, 182.5]$ cpy 上具有较好的符合性，因此至少可认为地球物理流体模型在该频段上噪音水平是可接受的，不存在明显过剩 (对于更高频段，本文结果已不能给出明确结论)。

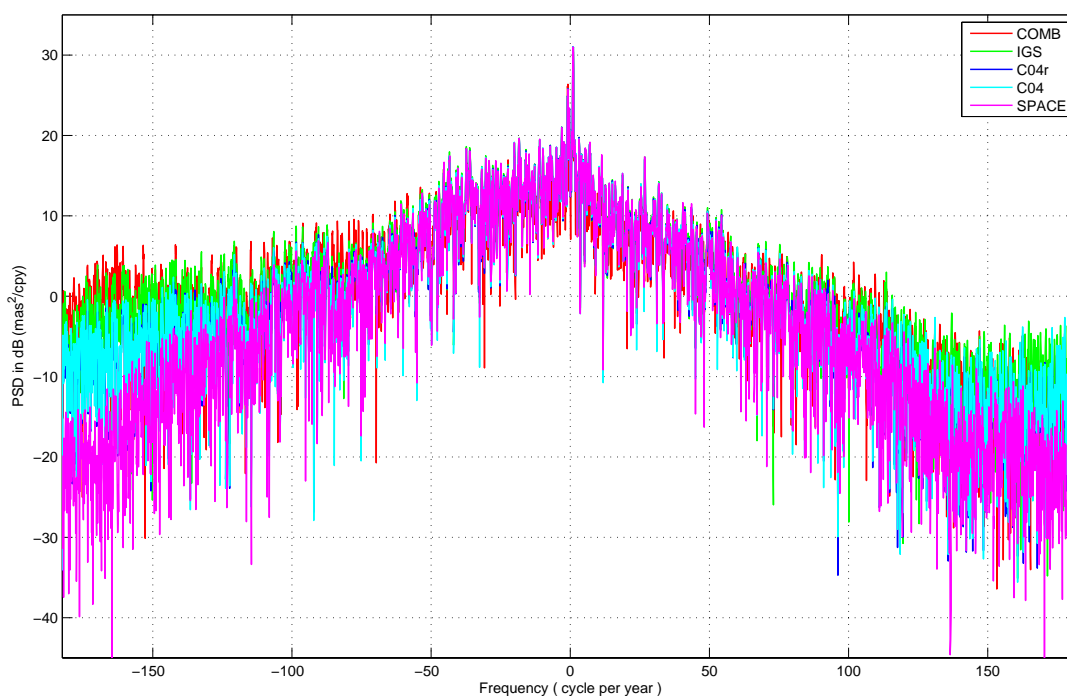
综合以上分析，本文建议在计算观测激发时不使用式 (6.2)，而应该使极移和地球物理激发的数据点相互处于对方相邻采样点的时间中点处 (例如，对于天采样数据，若极移在 UTC0.0000 采样，则大气、海洋和陆地水数据应该在 UTC12.0000 采样)，这样计算出来的观测激发数据点就会与地球

物理激发处于同一时间点，且避免了功率损失。若必须使用式 (6.2)，本文建议将天采样极移数据内插为 0.5 天采样或 6h 采样 (推荐采用 6h 采样以避免上述数据长度影响)，再计算观测激发。

另一方面，上述分析也证明 IGS 极移数据是十分可靠的 (至少在频段 $[-182.5, 182.5]$ cpy)，实际上，相对于 C04，IGS 观测激发与地球物理激发在高频段 (约高于 ± 100 cpy) 更为相符。



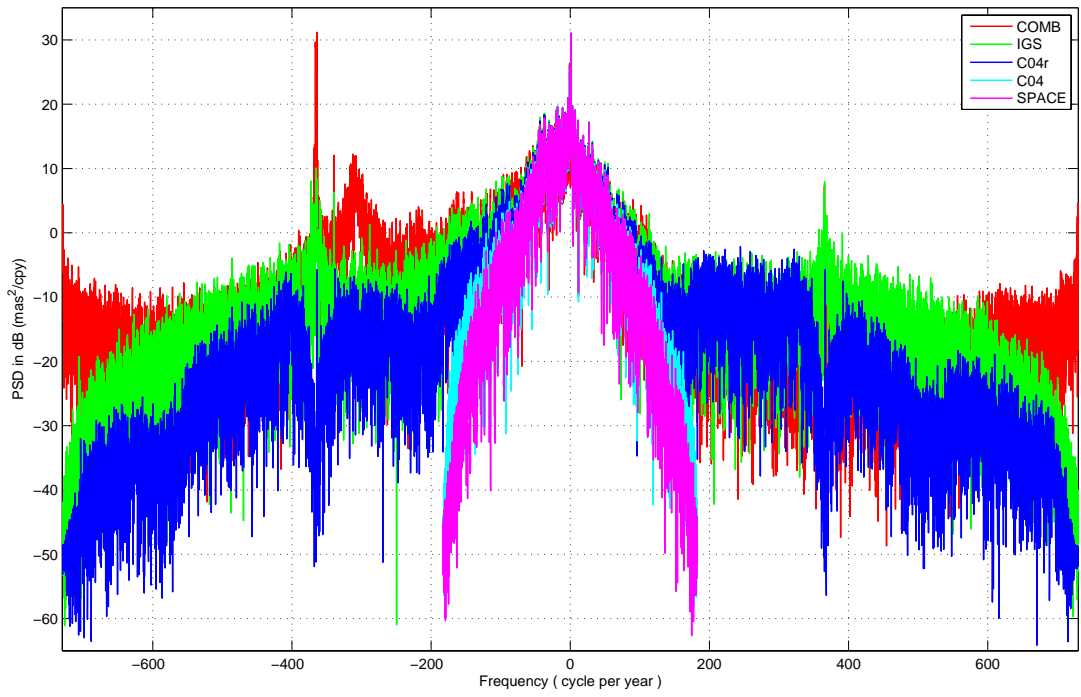
(a)



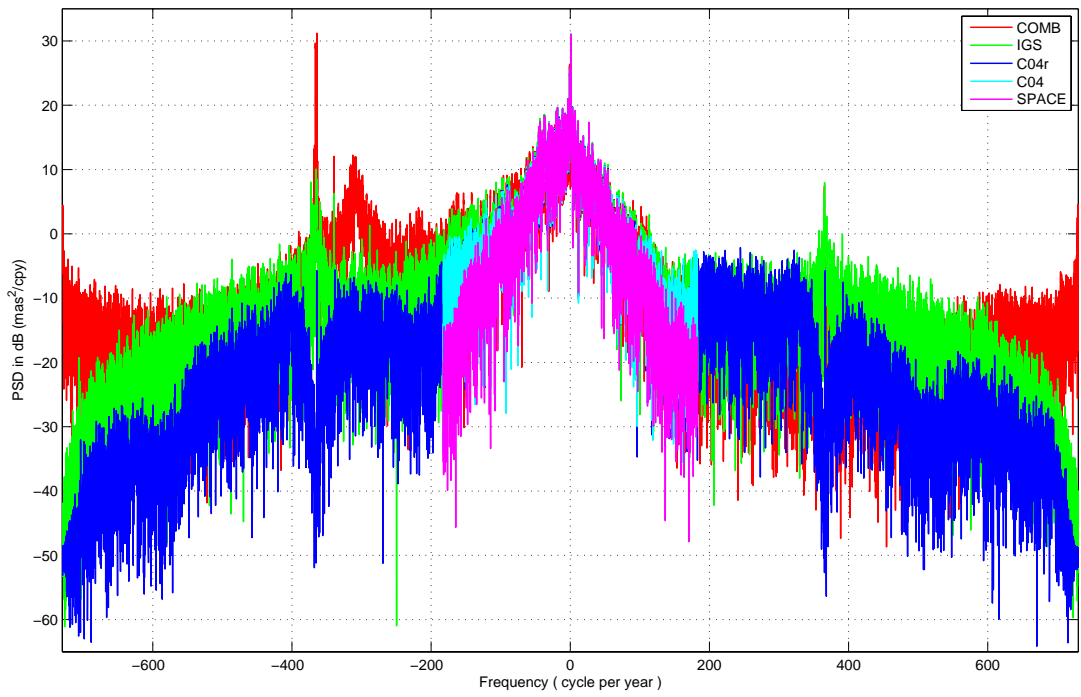
(b)

图 6.16 多种数据导出的观测激发与地球物理激发的功率谱比较 (较低频段)

Fig.6.16 PSD Comparisons of the geophysical excitation and the geodetic excitations derived from various data (The lower-frequency bands)



(a)



(b)

图 6.16 多种数据导出的观测激发与地球物理激发的功率谱比较 (全频段)

Fig.6.16 PSD Comparisons of the geophysical excitation and the geodetic excitations derived from various data (The full-frequency bands)

6.5 本章小结与讨论

本章从极移激发的角度对比分析了多种全球大气、海洋和陆地水模型，并综合这些模型的优点构建了一组联合模型 COMB。本章结果表明：大气模型的可靠性最佳，海洋模型次之，陆地水模型的准确性最差，且含有不同程度的长期（周期约 2 年或更长）系统偏差；在大气、海洋激发的基础上加入陆地水激发一般会降低与观测激发在低频处的符合度，不过，考虑陆地水激发可更好地解释周年激发；联合模型 COMB 在时域、频域以及在与观测激发的符合度方面均优于其它模型；若对联合模型 COMB 应用第五章的频率依赖转换函数，则可更好地解释周年激发，这进一步证实了频率依赖转换函数的可靠性（频率依赖转换函数对其它频段激发的影响很小，参见 5.3 节）。

另一方面，本文还利用多种极移观测数据探讨了高频观测激发的计算问题，证实式 (6.2) 的平滑作用将导致观测激发出现高频功率损失。针对该问题，本文提出如下两种简单方法：

1. 使极移和地球物理激发的数据点相互处于对方采样间隔的时间中点处，直接利用式 (6.1) 和 (6.3) 计算观测激发，这样得到的观测激发与地球物理激发处于相同采样时刻，且不需要使用式 (6.2)；
2. 若必须使用式 (6.2)，可将原极移数据线性插值，且使插值后数据长度为原数据长度的 4 倍（例如，可将天采样极移数据内插为 6h 采样）以避免数据长度的影响，这样式 (6.2) 的平滑作用将不会影响到原数据的有效频段。最后在分析结果时应排除因插值而增加的额外频段。

对比分析表明，IERS EOP-PC 的网页工具提供的观测激发存在功率损失问题，不推荐使用。本文推荐采用上述两种方法，它们均可正确计算高频观测激发，因此可用来探讨高频极移激发问题。

第七章 总结与展望

7.1 本文主要工作及贡献

本文的主要工作与贡献可总结如下：

1. 基于高精度的全球重力场模型 EGM2008 等重新估计了地球惯性张量，并结合 MHB2000 地球模型重新归算了三轴分层地球模型（包含地幔、液核和固态内核）参数，同时给出了相应的旋转对称分层地球模型。相对于 MHB2000 模型，本文地球模型与实际观测更为符合，相关参数可作为地球物理学、大地测量学和天文学等学科的基本参数。
2. 在 MHB2000 章动理论的基础上，本文推导了三轴性导致的章动转换函数增量，进而利用 HW95 高精度引潮力位模型和 IAU2000A_{R06} 章动模型给出了三轴性对章动影响的数值结果，建立了三轴分层地球章动序列。
3. 推导了直接顾及地球三轴性的 Liouville 方程，得出了三轴分层地球的自转本征模，导出了顾及地球三轴性的极移转换函数；推导了三轴地球 Chandler 晃动的椭圆函数解，导出了 Chandler 晃动的频率-振幅调制机制 FAM 理论模型，论证了 Chandler 晃动轨迹的椭圆性。结合极移观测和大气、海洋模型数据研究了三轴性的影响：考虑到目前的观测精度和地球物理流体模型精度，在极移激发研究中可不考虑三轴性，而在 Chandler 晃动的研究中则有必要考虑三轴性。
4. 基于经验性海潮、地幔滞弹性模型确定了频率依赖的极移转换函数（显式表达式），并模拟检验了该表达式相对于不同 Chandler 晃动周期、品质因子取值的可靠性。结合极移观测和大气、海洋模型数据研究了频率依赖响应对极移激发的影响，证实考虑频率依赖是必要的。从选用参数精度和理论的物理意义两方面比较了频率依赖自转理论与传统理论，论证了本文自转理论的合理性。
5. 基于多种极移观测数据，检验了多组大气、海洋和陆地水模型的可靠性，验证了本文频率依赖自转理论的可靠性。同时，通过分析比较，本文发现 IERS EOP-PC 提供的网页工具（用于计算和比较观测激发与地球物理激发）在计算观测激发时误用内插，导致观测激发存在高频功率损失。本文建议计算观测激发时采用本文推荐方法：即不用内插，而应使极移观测数据点和地球物理激发数据点相互处于对方的采样时间间隔中点。

7.2 本文主要创新点

本文的主要创新点如下：

1. 首次联合全球重力场模型和 MHB2000 地球模型建立了三轴分层地球模型，及相应的旋转对称分层地球模型。
2. 首次推导了顾及地球三轴性改正的章动理论，建立了三轴分层地球模型的章动序列。
3. 首次定量分析了三轴性对极移激发的影响，导出了三轴地球 Chandler 晃动的频率-振幅调制机制。
4. 将海潮耗散性和地幔滞弹性引入极移理论，首次确定了频率依赖极移转换函数的显式表达式，并基于多种极移观测数据验证了本文频率依赖自转理论的可靠性。

7.3 研究展望

本文确定的三轴地球章动序列仅考虑了地球动力学形状的影响，尚未考虑三轴性导致的核幔边界耦合的贡献。黄乘利 [2011] 指出，三轴分层地球模型和旋转对称分层模型的核幔耦合会有所不同，这种耦合差异导致的章动值增量有可能也需要考虑。

本文确定的频率依赖极移转换函数暂时只包含了地幔滞弹性、海潮耗散性的影响（其中海潮包括周日潮、长期潮和极潮）。实际上，海平面对气压的响应也是频率依赖的：在低频段接近反变气压计 (IB) 模型，在高频段则接近非反变气压计 (Non-IB) 模型。此外，核幔的解耦/耦合作用亦随频率变化：在高频段近乎解耦，核幔各自旋转，在极低频段（频率接近 0）则完全耦合，核幔作为一个整体旋转 [Lambeck, 1980]。因此，本文的频率依赖自转理论将来有可能进一步包含频率依赖的 IB/Non-IB 效应和核幔解耦/耦合作用，届时可更为准确地描述各种频率扰动对地球自转的影响。

附录 A 液态外核角动量方程的推导

A.1 液态外核的动力学方程

作用于外核的力主要有地球内部的压力和引力，可分别由压强 P 和引力位 ϕ_g 表示。由牛顿第二定律，外核中任一质点满足

$$\left(\frac{D}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times\right)(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_f) = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi_g \quad (\text{A.1})$$

其中 $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v}_f \cdot \nabla$ 为物质导数。将式 (A.1) 左端展开可得

$$\left(\frac{D}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times\right)(\mathbf{r} + \mathbf{v}_f) = \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_f + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (\text{A.2})$$

由于 $\mathbf{v}_f = \boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r} + \mathbf{v}$ ， $\boldsymbol{\Omega}_f = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_f$ ，故

$$\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r} + \mathbf{v}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega}_f + \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_f \times \mathbf{r} \quad (\text{A.3})$$

且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\Omega}_f \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\Omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

注意到

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_f + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r} = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r} + \mathbf{v}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r} \quad (\text{A.5})$$

略去小量 $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ ，并应用矢量关系式 $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r}$ ，式 (A.5) 可化为

$$\begin{aligned} & 2\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\Omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega}_f \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\Omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\Omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

根据 Mathews et al. [1991a] 对离心力位的定义 $\nabla \phi_c(\boldsymbol{\omega}) \equiv \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ ，式 (A.5) 可改写为

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_f + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r} = \nabla \phi_c(\boldsymbol{\Omega}_f) - \nabla \phi_c(\boldsymbol{\omega}_f) \quad (\text{A.7})$$

将式 (A.3) 和 (A.7) 代入式 (A.1) 和 (A.2)，可得

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_f}{\partial t} \times \mathbf{r} + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}_f \times (\boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla[\phi_g + \phi_c(\boldsymbol{\Omega}_f)] \quad (\text{A.8})$$

式 (A.8) 即为 Mathews et al. [1991a] 附录 B 给出的液态外核的动力学方程 (B3)。

A.2 液态外核的角动量方程

液态外核的角动量可表示为

$$\mathbf{H}_f = \int_{V_f} \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_f) dV = \int_{V_f} \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{r} + \mathbf{v}) dV \quad (\text{A.9})$$

若选取 Tisserand 轴使得全球的相对角动量 $\int_{V_f} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = 0$ ，则

$$\mathbf{H}_f = \int_{V_f} \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{r}) dV \quad (\text{A.10})$$

根据 Mathews et al. [1991a] 式 (B9),

$$\frac{d\mathbf{H}_f}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_f = \frac{d\mathbf{H}_f}{dt} + (\boldsymbol{\Omega}_f - \boldsymbol{\omega}_f) \times \mathbf{H}_f = - \int_{V_f} \mathbf{r} \times (\nabla P + \rho \nabla \phi_g) dV \quad (\text{A.11})$$

而

$$\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{H}_f = \boldsymbol{\Omega}_f \times \int_{V_f} \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{r}) dV \quad (\text{A.12})$$

采用 Mathews et al. [1991a] 的符号，以 $\nabla \phi_c(\boldsymbol{\Omega}_f) = \boldsymbol{\Omega}_f \times (\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{r})$ 表示质点的离心力，式 (A.12) 可改写为

$$\boldsymbol{\Omega}_f \times \mathbf{H}_f = \int_{V_f} \rho \mathbf{r} \times \nabla \phi_c(\boldsymbol{\Omega}_f) dV \quad (\text{A.13})$$

故式 (A.11) 可改写为

$$\frac{d\mathbf{H}_f}{dt} - \boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{H}_f = - \int_{V_f} \mathbf{r} \times [\nabla P + \rho \nabla \phi_g + \rho \nabla \phi_c(\boldsymbol{\Omega}_f)] dV \quad (\text{A.14})$$

Mathews et al. [1991a] 证明在考虑精度内

$$\gamma \equiv - \int_{V_f} \mathbf{r} \times [\nabla P + \rho \nabla \phi_g + \rho \nabla \phi_c(\boldsymbol{\Omega}_f)] dV \approx 0 \quad (\text{A.15})$$

即外核中压力、引力和离心力的力矩几乎相互抵消。因此，外核的角动量方程可写为

$$\frac{d\mathbf{H}_f}{dt} - \boldsymbol{\omega}_f \times \mathbf{H}_f = 0 \quad (\text{A.16})$$

若考虑电磁耦合，方程右端将变为 $\boldsymbol{\Gamma}_f^{em}$ 。

附录 B 无量纲引潮力位表达式的推导

B.1 引潮力位的一般形式

一般地，地球表面的引潮力位可表示为

$$V_T = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos \theta) \sum_j C_{nmj} \cos[\omega_{nmj}t + \beta_{nmj} + m\lambda + (n-m)\frac{\pi}{2}] \quad (\text{B.1})$$

转换到空间时需乘以因子 $\frac{r^n}{R^n}$ 。其中，与极移关系最为密切的是二阶一次引潮位 V_{21} ，因为它直接与物质项 c 相关，其表达式为

$$\begin{aligned} V_{21} &= \frac{r^2}{R^2} P_{21}(\cos \theta) \sum_j C_{21j} \sin(\omega_{21j}t + \beta_{21j} + \lambda) \\ &= \frac{r^2}{R^2} P_{21}(\cos \theta) \left[\cos \lambda \sum_j C_{21j} \sin(\omega_{21j}t + \beta_{21j}) + \sin \lambda \sum_j C_{21j} \cos(\omega_{21j}t + \beta_{21j}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

注意到 $P_{21}(\cos \theta) = 3 \sin \theta \cos \theta$ ，有 $r^2 P_{21}(\cos \theta) \sin \lambda = 3xz$ 及 $r^2 P_{21}(\cos \theta) \cos \lambda = 3yz$ ，故

$$V_{21} = \frac{3}{R^2} \left[xz \sum_j C_{21j} \sin(\omega_{21j}t + \beta_{21j}) + yz \sum_j C_{21j} \cos(\omega_{21j}t + \beta_{21j}) \right] \quad (\text{B.3})$$

引入

$$A_{21j} = \frac{3}{\Omega_0^2 R^2} C_{21j}, \quad \omega_{21j} = -\sigma, \quad \beta_{21j} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.4})$$

式 (B.3) 化为

$$V_{21} = \Omega_0^2 \left[xz \sum_j A_{21j} \sin(\omega_{21j}t + \beta_{21j}) + yz \sum_j A_{21j} \cos(\omega_{21j}t + \beta_{21j}) \right] \quad (\text{B.5})$$

令

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2, \quad \phi_1 = \sum_j A_{21j} \sin(\omega_{21j}t + \beta_{21j}), \quad \phi_2 = \sum_j A_{21j} \cos(\omega_{21j}t + \beta_{21j}) \quad (\text{B.6})$$

则

$$V_{21} = \Omega_0^2 (xz\phi_1 + yz\phi_2) = \frac{1}{3} \Omega_0^2 r^2 \operatorname{Re}(\phi Y_{21}) \quad (\text{B.7})$$

其中

$$Y_{nm}(\cos \theta) = P_{nm}(\cos \theta) e^{im\lambda} \quad (\text{B.8})$$

对于

$$\begin{aligned} V_{22} &= \frac{r^2}{R^2} P_{22}(\cos \theta) \sum_j C_{22j} \cos(\omega_{22j}t + \beta_{22j} + 2\lambda) \\ &= \frac{r^2}{R^2} P_{22}(\cos \theta) \left[\cos 2\lambda \sum_j C_{22j} \cos(\omega_{22j}t + \beta_{22j}) - \sin 2\lambda \sum_j C_{22j} \sin(\omega_{22j}t + \beta_{22j}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

其中 $P_{22}(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$ 。引入

$$B_{21j} = \frac{3}{\Omega_0^2 R^2} C_{21j} \quad (\text{B.10})$$

$$\phi^S = \phi_1^S + i\phi_2^S, \quad \phi_1^S = \sum_j B_{21j} \sin(\omega_{21j}t + \beta_{21j}), \quad \phi_2^S = \sum_j B_{21j} \cos(\omega_{21j}t + \beta_{21j})$$

有

$$V_{22} = \frac{1}{3} \Omega_0^2 r^2 \text{Re}(\phi^S Y_{22}) \quad (\text{B.11})$$

B.2 采用 HW95 引潮位模型格式的无量纲引潮力位

在 HW95 模型中，引潮位表述为

$$V_T = \sum_{n=2}^6 \sum_{m=0}^n \frac{r^n}{a^n} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \sum_j [C_{nmj}(t) \cos \alpha_{nmj}(t) + S_{nmj}(t) \sin \alpha_{nmj}(t)] \quad (\text{B.12})$$

$$C_{nmj}(t) = C_{nmj}^0 + C_{nmj}^1 \cdot t \quad (\text{B.13})$$

$$S_{nmj}(t) = S_{nmj}^0 + S_{nmj}^1 \cdot t$$

其中，位系数 C_{nmj}^0 和 S_{nmj}^0 量纲为 m^2/s^2 ， C_{nmj}^1 和 S_{nmj}^1 则为 $\text{m}^2/\text{s}^2/\text{cy}$ ；时间 t 从纪元 J2000 起算，且以世纪为单位；参数 $\alpha_{nmj}(t)$ 满足

$$\alpha_{nmj}(t) = m\lambda + \sum_{j=1}^{11} k_{ij} \sum_{k=0}^4 \frac{\partial^k \lambda_j}{\partial t^k} t^k \equiv m\lambda + \theta_i, \quad k_{i1} = m \quad (\text{B.14})$$

其中系数 k_{ij} 由 HW95 模型给出，经度 $\lambda_j = \tau, s, h, p, N', p_s, L_{\text{Mer}}, L_{\text{Ven}}, L_{\text{Mar}}, L_{\text{Jup}}, L_{\text{Sat}}$ 的值列于表 B.1 (单位为“度”或“度/1000年”)。

表 B.1 时变经度 $\lambda_j = \tau, s, h, p, N', p_s, L_{\text{Mer}}, L_{\text{Ven}}, L_{\text{Mar}}, L_{\text{Jup}}, L_{\text{Sat}}$ (引自 Simon et al. [1994])

Table B.1 Time-dependent longitudes $\lambda_j = \tau, s, h, p, N', p_s, L_{\text{Mer}}, L_{\text{Ven}}, L_{\text{Mar}}, L_{\text{Jup}}, L_{\text{Sat}}$ (from Simon et al. [1994])

j	1	t	t^2	t^3	t^4	
τ	1	242.14980452999	127037328.88553056	0.17696111	-0.00183140	0.00008824
s	2	218.31664562999	4812678.81195750	-0.14663889	0.00185140	-0.00015355
h	3	280.46645016002	360007.69748806	0.03032222	0.00002000	-0.00006532
p	4	83.35324311998	40690.13635250	-1.03217222	-0.01249168	0.00052655
N'	5	234.95544499000	19341.36261972	-0.20756111	-0.00213942	0.00016501
p_s	6	282.93734098001	17.19457667	0.04568889	-0.00001776	-0.00003323
L_{Mer}	7	252.25090551999	1494740.72172233	0.03034984	0.00001811	-0.00006532
L_{Ven}	8	181.97980085000	585192.12953330	0.03101395	0.00001490	-0.00006532
L_{Mar}	9	355.43299958002	191416.96370297	0.03105187	0.00001564	-0.00006532
L_{Jup}	10	34.35151874003	30363.02774848	0.02232972	0.00003701	-0.00005214
L_{Sat}	11	50.07744430000	12235.11068622	0.05190783	-0.00002985	-0.00009740

根据式 (B.12) 和(B.14), V_{21} 可表示为

$$V_{21} = \frac{r^2}{a^2} \bar{P}_{21}(\cos \theta) \sum_j [C_{21j}(t) \cos \alpha_{21j}(t) + S_{21j}(t) \sin \alpha_{21j}(t)] \quad (\text{B.15})$$

由三角函数性质可知

$$\begin{cases} \cos \alpha_{21j}(t) = \cos(\lambda + \theta_i) = \cos \lambda \cos \theta_i - \sin \lambda \sin \theta_i \\ \sin \alpha_{21j}(t) = \sin(\lambda + \theta_i) = \sin \lambda \cos \theta_i + \cos \lambda \sin \theta_i \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

故式 (B.15) 可改写为

$$V_{21} = \frac{r^2}{a^2} \bar{P}_{21}(\cos \theta) \sum_j [\cos \lambda (C_{21j} \cos \theta_i + S_{21j} \sin \theta_i) - \sin \lambda (C_{21j} \sin \theta_i - S_{21j} \cos \theta_i)] \quad (\text{B.17})$$

注意到式 (B.7) 可写为

$$V_{21} = \frac{1}{3} \Omega_0^2 r^2 \operatorname{Re}(\phi Y_{21}) = \frac{1}{3N_{21}} \Omega_0^2 r^2 \bar{P}_{21}(\cos \theta) (\phi_1 \cos \lambda - \phi_2 \sin \lambda) \quad (\text{B.18})$$

对比式 (B.17) 和 (B.18) 可得

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{3N_{21}}{\Omega_0^2 a^2} \sum_j [C_{21j} \cos \theta_i + S_{21j} \sin \theta_i] \\ \phi_2 = \frac{3N_{21}}{\Omega_0^2 a^2} \sum_j [C_{21j} \sin \theta_i - S_{21j} \cos \theta_i] \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

或写为复数形式

$$\tilde{\phi} = \phi_1 + i\phi_2 = \frac{3N_{21}}{\Omega_0^2 a^2} \sum_j (C_{21j} - iS_{21j}) e^{i\theta_i} \quad (\text{B.20})$$

以上采用的是潮汐的符号系统 (以向西为正), 而地球自转研究则以向东为正。若采用地球自转的符号系统, 式 (B.20) 需取共轭, 即

$$\tilde{\phi} = \frac{3N_{21}}{\Omega_0^2 a^2} \sum_j (C_{21j} + iS_{21j}) e^{-i\theta_i} \quad (\text{B.21})$$

参考文献

- Agnew DC, Farrell WE (1978) Self-consistent equilibrium ocean tides. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 55: 171–181.
- Barnes RTH, Hide R, White AA, Wilson CA (1983) Atmospheric angular momentum fluctuations, length-of-day changes and polar motion. *Proc. Royal Society London Ser. A*, 387: 31–73.
- Benjamin D, Wahr J, Ray RD, Egbert GD, Desai SD (2006) Constraints on mantle anelasticity from geodetic observations, and implications for the J2 anomaly. *Geophys. J. Int.*, 165: 3–16.
- Bizouard C, Seoane L (2010) Atmospheric and oceanic forcing of the rapid polar motion. *J. Geod.*, 84: 19–30.
- Brzeziński A (1992) Polar motion excitation by variations of the effective angular momentum function: considerations concerning deconvolution problem. *Manuscr. Geod.*, 17: 3–20.
- Brzeziński A (1994) Polar motion excitation by variations of the effective angular momentum function, II: extended model. *Manuscr. Geod.*, 19: 157–171.
- Brzeziński A (2011) On the consistencies among and reliabilities of various geophysical fluid models. Private communication.
- Brzezinski A, Capitaine N (1993) The use of the precise observations of the celestial ephemeris pole in the analysis of geophysical excitation of earth rotation. *J. Geophys. Res.*, 98: 6667–6675.
- Brzeziński A, Nastula J, Kołaczek B, Ponte RM (2003) Oceanic excitation of polar motion from intraseasonal to decadal periods, In: *Proceedings of the International Association of Geodesy IAG General Assembly Sapporo, Japan June 30 – July 11, 2003*, 591–596.
- Brzeziński A, Nastula J, Kołaczek B (2009) Seasonal excitation of polar motion estimated from recent geophysical models and observations. *J. Geodyn.*, 48: 235–240.
- Capitaine N, Chapront J, Lambert S, Wallace P (2003) Expressions for the Celestial Intermediate Pole and Celestial Ephemeris Origin consistent with the IAU 2000A precession-nutation model. *Astron. Astrophys.*, 400: 1145–1154.
- Capitaine N, Mathews PM, Dehant V, Wallace PT, Lambert SB (2009) On the IAU 2000/2006 precession-nutation and comparison with other models and VLBI observations. *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, 103: 179–190.
- Carter WE (1981) Frequency modulation of the Chandlerian component of polar motion. *J. Geophys. Res.*, 86: 1653–1658.
- Carter WE (1982) Refinements of the Polar Motion Frequency Modulation Hypothesis. *J. Geophys. Res.*, 87: 7025–7028.
- Chandler SC (1891) On the variation of the latitude. *Astron. J.*, 11: 83–86.
- Chao BF (1983) Autoregressive harmonic analysis of the Earth's polar motion using homogeneous International Latitude Service data. *J. Geophys. Res.*, 88: 10299–10307.
- Chao BF, Gross RS (1987) Changes in the Earth's rotation and low-degree gravitational field induced by earthquakes. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 91: 569–596.
- Chao BF, Ray RD, Gipson JM, Egbert GD, Ma C (1996) Diurnal/semidiurnal polar motion excited by

- oceanic tidal angular momentum. *J. Geophys. Res.*, 101: 20151–20163.
- Chao BF, Yan H (2010) Relation between length-of-day variation and angular momentum of geophysical fluids. *J. Geophys. Res.* 115, B10417, doi:10.1029/2009JB007024.
- Chen JL, Wilson CR (2005) Hydrological excitations of polar motion, 1993-2002. *Geophys. J. Int.*, 160: 833–839.
- Chen W, Shen WB (2010a) New estimates of the inertia tensor and rotation of the triaxial nonrigid Earth. *J. Geophys. Res.*, 115, B12419, doi:10.1029/2009JB007094.
- Chen W, Shen WB (2010b) A modified Liouville equation for the triaxial Earth with frequency-dependent responses, paper presented at the Observing and Understanding Earth Rotation – A Joint GGOS/IAU Science Workshop, Shanghai, China, October 25-28, 2010.
- Chen W, Shen WB (2011) Effects of the Earth's triaxiality and frequency-dependent responses on the polar motion excitations. *J. Geodyn.*, submitted.
- Chen W, Shen WB, Qin X (2010) New solution for the Earth's free wobble and its geophysical implications. *Geo-spatial Information Science*, 13: 49–55.
- Chen W, Shen WB, Han J, Li J (2009) Free wobble of the triaxial Earth: theory and comparisons with International Earth Rotation Service (IERS) data. *Surv. Geophys.*, 30: 39–49.
- Dahlen FA (1974) On the static deformation of an Earth model with a fluid core. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 36: 461–485.
- Dahlen FA (1976) The passive influence of the oceans upon the rotation of the Earth. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 46: 363–406.
- de Vries D, Wahr JM (1991) The effects of the solid inner core and nonhydrostatic structure on the Earth's forced nutations and Earth tides. *J. Geophys. Res.*, 96: 8275–8293.
- Dehant V, Hinderer J, Legros H, Lefftz M (1993) Analytical approach to the computation of the Earth, the outer core and the inner core rotational motions. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 76: 259–282.
- Dehant V, Arias F, Bizouard C, Bretagnon P, Brzezinski A, Buffett B, Capitaine N, Defraigne P, De Viron O, Feissel M, Fliegel H, Forte A, Gambis D, Getino J, Gross RS, Herring T, Kinoshita H, Klioner S, Mathews PM, McCarthy D, Moisson X, Petrov S, Ponte RM, Roosbeek F, Salstein D, Schuh H, Seidelmann H, Soffel M, Souchay J, Vondrak J, Wahr JM, Wallace P, Weber R, Williams J, Yatskiv Y, Zharov V, Zhu SY (1999) Considerations concerning the non-rigid Earth nutation theory. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 72: 245–310.
- Dehant V, de Viron O (2002) Earth rotation as an interdisciplinary topic shared by astronomers, geodesists and geophysicists. *Adv. Space Res.*, 30: 163–173.
- Dehant V, de Viron O, Barriot J-P (2005) Geophysical excitation of the Earth orientation parameters EOP and its contribution to GGOS. *J. Geodyn.*, 40: 394–399.
- Dickman SR (1981) Investigation of controversial polar motion features using homogeneous International Latitude Service Data, *J. Geophys. Res.*, 86(B6): 4904–4912.
- Dickman SR (1993) Dynamic ocean-tide effects on Earth's rotation. *Geophys. J. Int.*, 112: 448–470.
- Dickman SR, Gross RS (2010) Rotational evaluation of a long-period spherical harmonic ocean tide model. *J. Geod.*, 84: 457–464.

- Dobslaw H, Dill R, Grötzsch A, Brzeziński A, Thomas M (2010) Seasonal polar motion excitation from numerical models of atmosphere, ocean, and continental hydrosphere. *J. Geophys. Res.*, 115, B10406, doi:10.1029/2009JB007127.
- Ducarme B, Sun H-P, Xu J-Q (2007) Determination of the free core nutation period from tidal gravity observations of the GGP superconducting gravimeter network. *J. Geod.*, 81: 179–187.
- Dziewonski AM, Anderson DL (1981) Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25: 297–356.
- Escapa A, Getino J, Ferrandiz JM (2002) Indirect effect of the triaxiality in the Hamiltonian theory for the rigid Earth nutations. *Astron. Astrophys.*, 389: 1047–1054.
- Eubanks TM (1993) Variations in the orientation of the Earth. In *Contributions of Space Geodesy to Geodynamics: Earth Dynamics, Geodyn. Ser.*, vol.24, edited by D. E. Smith and D. L. Turcotte, pp. 1–54, AGU, Washington, D. C.
- Foerste C, Flechtner F, Schmidt R, Stubenvoll R, Rothacher M, Kusche J, Neumayer K-H, Biancale R, Lemoine J-M, Barthelmes F, Bruinsma J, Koenig R, Meyer U (2008) EIGEN-GL05C: a new global combined high-resolution GRACE-based gravity field model of the GFZ-GRGS cooperation. *Geophys. Res. Abstracts*, 10, EGU2008-A-03426.
- Folgueira M, Souchay J (2005) Free polar motion of a triaxial and elastic body in Hamiltonian formalism: application to the Earth and Mars. *Astron. Astrophys.*, 432: 1101–1113.
- 高布锡 (1997) 天文地球动力学原理. 科学出版社, 北京.
- Gaposchkin EM (1972) Analysis of pole positions from 1846-1970. In: *Rotation of the Earth*, pp. 19-32. P. Melchior, S. Yumi (eds). Reidel, Dordrecht.
- Greff-Lefitz M, Legros H (1995) Core-mantle coupling and polar motion. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 91: 273–283.
- Gross RS (1992) Correspondence between theory and observations of polar motion. *Geophys. J. Int.*, 109: 162–170.
- Gross RS (2000) The excitation of the Chandler wobble. *Geophys. Res. Lett.*, 27: 2329–2332.
- Gross RS (2007) Earth rotation variations – long period. In: *Physical Geodesy*, edited by T. A. Herring, pp. 239–294, *Treatise on Geophysics* vol. 3, pp. 243–294, Elsevier, Oxford.
- Gross RS (2009) An improved empirical model for the effect of long-period ocean tides on polar motion. *J. Geod.*, 83: 635–644.
- Gross RS (2010) On the inverted barometer (IB) assumption and the ECCO model run at JPL. Private communication.
- Gross RS, Chao BF (2005) The rotational and gravitational signature of the December 26, 2004 Sumatran earthquake. *Surv. Geophys.*, 27: 615–632.
- Gross RS, Fukumori I, Menemenlis D (2003) Atmospheric and oceanic excitation of the Earth's wobbles during 1980–2000. *J. Geophys. Res.*, 108(B8), 2370, doi:10.1029/2002JB002143.
- Groten E (2004) Fundamental parameters and current (2004) best estimates of the parameters of common relevance to astronomy, geodesy, and geodynamics. *J. Geod.*, 77: 724–797.
- Guo JY, Greiner-Mai H, Ballani L, Jochmann H, Shum CK (2005) On the double-peak spectrum of the

- Chandler wobble. *J. Geod.*, 78: 654–659.
- Gwinn CR, Herring TA, Shapiro II (1986) Geodesy by radiointerferometry: Studies of the forced nutations of the Earth, 2, Interpretation. *J. Geophys. Res.*, 91: 4755–4765.
- Hartmann T, Wenzel H (1995) The HW95 tidal potential catalogue. *Geophys. Res. Lett.*, 22: 3553–3556.
- Heiskanen WA, Moritz H (1967) *Physical geodesy*. Freeman and Company, San Francisco.
- Herring TA, Gwinn CR, Shapiro II (1986) Geodesy by radiointerferometry: Studies of the forced nutations of the Earth, 1, Data analysis. *J. Geophys. Res.*, 91: 4745–4754.
- Herring TA, Mathews PM, Buffett BA (2002) Modeling of nutation and precession: Very long baseline interferometry results. *J. Geophys. Res.*, 107(B4), 2069, doi:10.1029/2001JB000165.
- Hide R, Boggs DH, Dickey JO, Dong D, Gross RS, Jackson A (1996) Topographic core-mantle coupling and polar motion on decadal time-scales. *Geophys. J. Int.*, 125: 599–607.
- Hilton et al. (2006) Report of the International Astronomical Union Division I working group on precession and the ecliptic. *Celest. Mech. Dyn. Astro.*, 94: 351–367.
- Höpfner J (2003) Chandler and annual wobbles based on space-geodetic measurements. *J. Geodyn.*, 36: 369–381.
- 黄乘利 (2011) 关于三轴核幔耦合对章动的影响. 私人通讯.
- Huang C-L, Dehant V, Liao X-H, Van Hoolst T, Rochester MG (2011) On the coupling between magnetic field and nutation in a numerical integration approach. *J. Geophys. Res.*, 116, B03403, doi: 10.1029/2010JB007713.
- Iijima S (1965) On the yearly trend of the periodic components of polar motion. *Ann. Tokyo Astron. Obs.*, 9: 155–181.
- Jochmann H (2009) Basic relations for studying the influence of geophysical processes on the Earth's rotation: the angular momentum approach. *Surv. Geophys.*, 30: 1–37.
- Koot L, de Viron O (2011) Atmospheric contributions to nutations and implications for the estimation of deep Earth's properties from nutation observations. *Geophys. J. Int.*, 185: 1255–1265.
- Koot L, Dumberry M, Rivoldini A, de Viron O, Dehant V (2010) Constraints on the coupling at the core-mantle and inner core boundaries inferred from nutation observations. *Geophys. J. Int.*, 182: 1279–1294.
- Koot L, Rivoldini A, de Viron O, Dehant V (2008) Estimation of Earth interior parameters from a Bayesian inversion of very long baseline interferometry nutation time series. *J. Geophys. Res.*, 113, B08414, doi:10.1029/2007JB005409.
- Kuehne J, Wilson CR (1996) Estimates of the Chandler wobble frequency and Q. *J. Geophys. Res.*, 101(B6): 13537–13579.
- Kudryavtsev S (2004) Improved harmonic development of the Earth tide-generating potential. *J. Geod.*, 77: 829–838.
- Lambeck K (1980) *The Earth's variable rotation: geophysical causes and consequences*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lieske JH, Lederle T, Fricke W, Morando B (1977) Expressions for the precession quantities based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants. *Astron. Astrophys.*, 58: 1–16.

- Liu HS, Chao BF (1991) The Earth's equatorial principal axes and moments of inertia. *J. Geophys. Res.*, 106: 699–702.
- Liu L, Hsu H, Grafarend EW (2007) Normal Morlet wavelet transform and its application to the Earth's polar motion. *J. Geophys. Res.*, 112, B08401, doi: 10.1029/2006JB004895.
- Marchenko AN, Abrikosov OA (2001) Evolution of the Earth's principal axes and moments of inertia: the canonical form of solution. *J. Geod.*, 74: 655–669.
- Marchenko AN, Schwintzer P (2003) Estimation of the Earth's tensor of inertia from recent global gravity field solutions. *J. Geod.*, 76: 495–509.
- Mathews PM, Bretagnon P (2003) Polar motions equivalent to high frequency nutations for a nonrigid Earth with anelastic mantle. *Astron. Astrophys.*, 400: 1113–1128.
- Mathews PM, Buffett BA, Herring TA, Shapiro II (1991a) Forced nutations of the Earth: influence of inner core dynamics 1. theory. *J. Geophys. Res.*, 96(B5): 8219–8242.
- Mathews PM, Buffett BA, Herring TA, Shapiro II (1991b) Forced nutations of the Earth: influence of inner core dynamics 2. numerical results and comparisons. *J. Geophys. Res.*, 96(B5): 8243–8257.
- Mathews PM, Buffett BA, Shapiro II (1995) Love numbers for diurnal tides: Relation to wobble admittances and resonance expansions. *J. Geophys. Res.*, 100(B6): 9935–9948.
- Mathews PM, Herring TA, Buffett BA (2002) Modeling of nutation and precession: new nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior. *J. Geophys. Res.*, 107, B42068, doi: 10.1029/2001JB000390.
- McCarthy DD, Petit G (eds) (2003) IERS conventions 2003. IERS Technical Notes 32, Observatoire de Paris.
- Mound JE (2005) Electromagnetic torques in the core and resonant excitation of decadal polar motion. *Geophys. J. Int.*, 160: 721–728.
- Moritz H, Mueller II (1987) *Earth rotation: theory and observation*. The Ungar Publishing Company, New York.
- Munk WH, MacDonald JGF (1960) *The rotation of the Earth*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Nastula J, Salstein DA, Ponte RM (2003) Empirical patterns of variability in atmospheric and oceanic excitation of polar motion. *J. Geodyn.*, 36: 383–396.
- Okubo S (1982) Is the Chandler period variable? *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 71: 629–646.
- Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK (2008) An Earth gravitational model to degree 2160: EGM2008. Presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13–18.
- Petit G, Luzum B (eds.) (2010) IERS conventions 2010. IERS Technical Notes 36, Observatoire de Paris.
- Ponte RM, Stammer D (1999) Role of ocean currents and bottom pressure variability on seasonal polar motion. *J. Geophys. Res.*, 104: 23393–23409.
- Ray J (2009) Status and prospects for IGS polar motion measurements, <http://acc.igs.org/studies.html>
- Ray J (2011) On the IGS polar motion data. Private Communication.
- Ray J, van Dam T (2011) On the long-period bias of the GLDAS hydrological model. Private Communication

- Rosat S, Lambert SB (2009) Free core nutation resonance parameters from VLBI and superconducting gravimeter data. *Astron. Astrophys.*, 503: 287–291.
- Salstein DA, Rosen RD (1997) Global momentum and energy signals from reanalysis systems. Proc. 7th Conf. on Climate Variations, American Meteorological Society, Boston, MA, 344–348.
- Salstein DA, Zhou YH, Chen JL (2005) Revised angular momentum datasets for atmospheric angular momentum studies. European Geophysical Union (EGU) Spring Meeting, Vienna, Austria.
- Sasao T, Wahr JM (1981) An excitation mechanism for the free core nutation. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 64: 729–746.
- Sasao T, Okubo S, Saito M (1980) A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth. In Proceedings of IAU Symposium 78, edited by E. P. Federov, M. L. Smith, and P. L. Bender, pp. 165–183, D. Reidel, Hingham, Mass.
- Seidelmann PK (1982) 1980 IAU theory of nutation: The final report of the IAU Working Group on nutation. *Celestial Mechanics*, 27: 79–106.
- Seitz F, Schmidt M (2005) Atmospheric and oceanic contributions to Chandler wobble excitation determined by wavelet filtering. *J. Geophys. Res.*, 110, B11406, doi:10.1029/2005JB003826.
- Smith ML (1974) The scalar equations of infinitesimal elastic-gravitational motion for a rotating, slightly elliptical Earth. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 37: 491–526.
- Smith ML (1977) Wobble and nutation of the Earth. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 50: 103–140.
- Souchay J, Kinoshita H (1997) Corrections and new developments in rigid-Earth nutation theory. II. Influence of second-order geopotential and direct planetary effect. *Astron. Astrophys.*, 318: 639–652.
- 申文斌, 陈巍, 李进 (2008) 基于时变地球主惯性矩的三轴地球的自由 Euler 运动. *武汉大学学报 (信息科学版)*, 33: 859–863.
- Shen WB, Chen W, Wang W-J, Liang Y (2007) Rotation of the Earth as a triaxial rigid body. *Geospatial Information Science*, 10: 85–90.
- 申文斌, 梁毅强 (2006) 内核对地球主转动惯量 A 与 B 的差的贡献. *大地测量与地球动力学*, 26(2): 39–42.
- Van Hoolst T, Dehant V (2002) Influence of triaxiality and second-order terms in flattenings on the rotation of terrestrial planets I. Formalism and rotational normal modes. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 134: 17–33.
- Vicente RO, Wilson CR (1997) On the variability of the Chandler frequency. *J. Geophys. Res.*, 102, B9: 20439–20446.
- Vondrák J, Ron C, Weber R (2003) Combined VLBI/GPS series of precession-nutation and comparison with IAU2000 model. *Astron. Astrophys.*, 397: 771–776.
- Wahr JM (1981) The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 64: 705–727.
- Wahr JM (1985) Deformation induced by polar motion. *J. Geophys. Res.*, 90: 9363–9368.
- Wahr JM, Bergen Z (1986) The effects of the mantle anelasticity on nutations, Earth tides, and tidal variations in the rotation rate. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 87: 633–668.
- Wahr JM, Sasao T (1981) A diurnal resonance in the ocean tide and in the Earth's load response due to

- the resonant free core nutation. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 64: 747–765.
- Wang W-J (2004) Decadal free polar motion of triaxial Earth. *Geophys. J. Int.*, 158: 1–15.
- Wallace PT (1998) SOFA: Standards of Fundamental Astronomy. *Highlights of Astronomy*, Vol. 11A, J. Andersen (ed.), Kluwer Academic Publishers, p. 191.
- Wilson CR (1985) Discrete polar motion equations. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 80: 551–554.
- Wilson CR, Chen JL (1996) Discrete polar motion equations for high frequencies. *J. Geod.*, 70: 581–585.
- Woolard EW (1953) Theory of the rotation of The Earth around its center of mass. *Astron. Pap. Am. Ephem. Naut. Alm.*, 15: 3–165.
- Wunsch C, Stammer D (1997) Atmospheric loading and the oceanic “inverted barometer” effect. *Rev. Geophys.*, 35: 79–107.
- 许厚泽等 (2010) 固体地球潮汐. 湖北科学技术出版社, 湖北.
- 闫昊明 (2011) 关于 GLDAS 陆地水数据. 私人通讯.
- 叶叔华, 黄斌 (2000) 天文地球动力学. 山东科学技术出版社, 山东.
- Zhong M, Naito I, Kitoh A (2003) Atmospheric, hydrological, and ocean current contributions to Earth's annual wobble and length-of-day signals based on output from a climate model. *J. Geophys. Res.*, 108, 2057, doi: 10.1029/2001JB000457.
- Zhou YH, Salstein DA, Chen JL (2006) Revised atmospheric excitation function series related to Earth variable rotation under consideration of surface topography. *J. Geophys. Res.*, 111, D12108, doi: 10.1029/2005JD006608.

攻读博士学位期间主持或参加的科研项目

1. 三轴分层地球自转的章动、极移和日长变化研究。国家自然科学基金 (No. 41174011), 第二参与人
2. 三轴分层地球的章动序列。武汉大学优秀博士学位论文培育基金 (No. 22), 项目负责人
3. 三轴分层地球极移及日长变化的研究。武汉大学 2008 年博士研究生 (含 1+4) 自主科研项目 (No. 49), 项目负责人
4. 三轴分层地球的章动序列。测绘遥感信息工程国家重点实验室专项科研经费, 第一参与人
5. 三轴地球极移和日长变化机制的研究。地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放基金资助项目 (No. 08-02-02), 项目负责人

攻读博士学位期间发表的学术论文

期刊论文

- Chen Wei**, Shen WenBin (2010) New estimates of the inertia tensor and rotation of the triaxial nonrigid Earth. *J. Geophys. Res.*, 115, B12419, doi:10.1029/2009JB007094. 【SCI】
- Chen Wei**, Shen WenBin, Han Jiancheng, Li Jin (2009) Free wobble of the triaxial Earth: theory and comparisons with International Earth Rotation Service (IERS) data. *Surv. Geophys.*, 30: 39–49, doi: 10.1007/s10712-009-9057-3. 【SCI】
- Shen WenBin, Sun Rong, **Chen Wei**, Zhang Zhenguang, Li Jin, Han Jiancheng, Ding Hao (2011) The expanding Earth at present: evidences from temporal gravity field and space-geodetic data. *Ann. Geophys.*, 54: 436–453. 【SCI】
- 陈巍, 申文斌 (2009) 三轴地球 Chandler 晃动的振幅-频率调制机制. *武汉大学学报 (信息科学版)*, 2009, 34(12): 1399–1402. 【EI】
- Chen Wei**, Shen WenBin (2011) Polar motion of the triaxial nonrigid Earth and atmospheric excitation. *Geo-spatial Information Science*, 14: 223–229.
- Chen Wei**, Shen WenBin (2010) Polar motion excited by atmosphere and ocean in multi-frequency bands. *Geo-spatial Information Science*, 2010, 13: 294–299.
- Chen Wei**, Shen WenBin, Dong XiaoWei (2010) Atmospheric excitation of polar motion. *Geo-spatial Information Science*, 13: 130–136.
- Chen Wei**, Shen WenBin, Qin XiaoFeng (2010) New solution for the Earth's free wobble and its geophysical implications. *Geo-spatial Information Science*, 2010, 13: 49–45.
- 陈巍, 申文斌, 李进, 韩建成 (2009) 利用 GRACE 重力数据推算日长变化. *大地测量与地球动力学*, 29: 119–124.
- Chen Wei**, Shen WenBin, Li ZhenHai (2009) GRACE's implication of temporal inertia moment and length of day. *Geo-spatial Information Science*, 12: 225–229.
- 申文斌, 陈巍, 韩建成, 李进, 孙榕, 梁毅强 (2009) 内核晃动对地球主惯性矩的时变性影响. *测绘科学*, 34(3): 7–10.

会议论文或报告

- Chen Wei**, Shen WenBin (2011) Rotational evaluations of global geophysical fluid models and improvement in the annual wobble excitation. IUGG2011, Melbourne, Australia, 28 June – 7 July 2011.
- Chen Wei**, Shen WenBin (2011) New estimates of the dynamic figure parameters of the stratified Earth. IUGG2011, Melbourne, Australia, 28 June – 7 July 2011.
- Chen Wei**, Shen WenBin (2010) A modified Liouville equation of the triaxial Earth with frequency-dependent responses. Observing and Understanding Earth Rotation – A Joint GGOS/IAU Science Workshop, Shanghai, China, October 25–28, 2010. 【invited presentation】
- Chen Wei**, Shen WenBin (2009) Do earthquakes significantly excite the Chandler wobble? In: Proceedings of the 2nd International Conference on Earth Observation for Global Changes (EOGC), 2009, pp.1013–1019. Chengdu, China, 25–29 May 2009.

攻读硕士学位期间发表的学术论文

期刊论文

申文斌, **陈巍**, 李进 (2008) 时变地球主惯性矩与三轴地球的自由 Euler 运动. *武汉大学学报 (信息科学版)*, 33: 859–863. 【EI】

Chen Wei, Shen WenBin, Han JianCheng (2008) The gravity field variation caused by the inner core super rotation. *Geo-spatial Information Science*, 11: 283–288.

Shen Wen Bin, **Chen Wei**, Sun Rong (2008) Earth's temporal principal moments and variable rotation. *Geo-spatial Information Science*, 11: 127–132.

Shen Wen Bin, **Chen Wei**, Wang Wen Jun, Liang Yi Qiang (2007) Rotation of the Earth as a triaxial rigid body. *Geo-spatial Information Science*, 10: 85–90.

会议论文或报告

陈巍, 申文斌, 韩建成, 李进 (2008) 三轴地球自转: 理论及与 IERS 数据的比较. 中国地球物理 2008, 中国大地出版社, 北京, pp.309–310.

Shen WenBin, **Chen Wei**, Zhang Zhengguo, Li Jin, Sun Rong, Han Jiancheng (2008) The Earth expansion: evidences from temporal gravity field and space-geodetic data. Presented at EGU General Assembly, April 13-18, 2008, Vienna, Austria.

申文斌, **陈巍**, 李进 (2007) 由时变重力场证实地球膨胀效应. 中国地球物理, 中国海洋大学出版社, 青岛, pp.392–393.

陈巍, 申文斌, 韩建成 (2007) 利用时变重力场证实内核超速旋转的可能性. 中国地球物理, 中国海洋大学出版社, 青岛, pp.365–366.

致谢

时光如白驹过隙，攻读博（硕）士的五年半时光转眼就到了尽头，而这篇短小的博士论文将为之划上句点。尽管论文篇幅有限，但它却承载着众多的关怀和帮助，也凝聚着作者和指导老师的心血。值此论文完成之际，我衷心

感谢父母多年的养育之恩：他们不仅抚养我成人，还用自己微薄的力量坚强地支持着我二十多年的求学生涯。

感谢导师申文斌教授的引导之恩：是他激发了我对地球科学的兴趣，使我摆脱迷茫并投身地球物理研究。五年半来，申文斌教授对我在学习和生活上关怀备至，鼓励我积极参加国内外会议等多种学术活动，使我眼界开阔、学术水平逐步提高。他对本文研究提供了长期、有力的支持，使得本文得以顺利完成。同时，他还认真审阅修改了全文并检验了本文的部分结果，使得本文逐步趋于完善。

感谢美国国家航空航天局 (National Aeronautics and Space Administration) 喷气动力实验室 (Jet Propulsion Laboratory) 的 Richard Gross 教授：他审阅了本文的部分内容 (英文稿)，并提出了许多宝贵意见和建议，使得本文的论证推理更为完善。此外，他邀请我参加 2010 年 “Observing and Understanding Earth Rotation – A Joint GGOS/IAU Science Workshop” 国际学术会议，大大开拓了我的国际视野。

感谢波兰科学院 (Polish Academy of Sciences) 空间研究中心 (Space Research Center) 的 Aleksander Brzeziński 教授：在本文的研究过程中，他提供了许多建设性意见和建议，特别是指出了在选取大气、海洋和陆地水模型时应考虑这些模型之间的相容性。。

感谢美国国家海洋大气局 (National Oceanic and Atmospheric Administration) 的 Jim Ray 教授：他专门为本文研究处理并提供了高精度的 IGS 极移数据，并和作者进行了多次有益讨论。

感谢中国科学院测量与地球物理研究所的徐建桥研究员、闫昊明研究员和武汉大学测绘学院的罗志才教授：他们在本文开题报告中提出了许多宝贵意见和建议。此外，闫昊明研究员还为本文研究提供了基于 GLDAS 陆地水模型的陆地水激发数据。

感谢上海天文台黄乘利研究员：他和作者进行了有益讨论，指出本文在扩展章动理论时存在的不足。

最后，感谢同门卢衍军博士、李进博士、韩建成博士、田伟博士、孙榕博士、丁浩博士和郑泽洪硕士，以及天文台机房钟波博士、李振海博士、王文睿博士、刘洋博士、王浩博士等在学习和生活上的关心和帮助。

本文研究是在以下科研项目的资助下完成的，在此一并表示感谢：

1. 三轴分层地球自转的章动、极移和日长变化研究。国家自然科学基金 (No. 41174011)
2. 三轴分层地球的章动序列。武汉大学优秀博士学位论文培育基金 (No. 22)
3. 三轴分层地球极移及日长变化的研究。武汉大学 2008 年博士研究生 (含 1+4) 自主科研项目 (No. 49)
4. 三轴分层地球的章动序列。测绘遥感信息工程国家重点实验室专项科研经费
5. 三轴地球极移和日长变化机制的研究。地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放基金资助项目 (No. 08-02-02)